Examen Formele Talen, Automaten en Complexiteit, groep A

14 juni 2011

Theorie

1. Zij Σ een eindig alfabet en L een reguliere taal over Σ. Toon aan dat $\{w \in \Sigma^* : w^R w \in L\}$ regulier is.

2. Stel dat $G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle$ een contextvrije grammatica is. Zij R' de kleinste verzameling van producties die R bevat en onder de volgende regels afgesloten is.

   (a) Als $A \to vBw$ en $B \to \varepsilon$ in R' dan $A \to vw$ in R'.

   (b) Als $A \to B$ en $B \to u$ in R' dan $A \to u$ in R'.

   Zij $G' = \langle V, \Sigma, R', S \rangle$. Toon aan: $L(G) = L(G')$ en als $x \in \Sigma^+$ en $S \overset{*}{\to}_{G'} x$ een afleiding van minimale lengte is dan bevat deze geen ε- en geen één-producties. Toon aan dat er een contextvrije grammatica $\hat{G}$ bestaat met $L(\hat{G}) = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

3. Toon aan dat de contextvrije talen niet onder rechter quotiënt afgesloten zijn. Hint: Stel $L = \{a^{2n}ba^n : n \geq 1\}$, $L_1 = (L\{b\})^+\{ab\}$ en $L_2 = \{b\}(L\{b\})^+$. Karakteriseer de eigenschappen van $vw \in L_1$ met $w \in L_2$. Toon daarmee dan aan dat voor $L_1/L_2 = \{v : \exists w \in L_2(vw \in L_1)\}$ geldt $L_1/L_2 \cap \{a\}^* = \{a^{4^n} : n \geq 1\}$. En dan?

4. Neem volgens de afspraak van het boek (of de les) aan dat $\langle M \rangle$ voor coderingen van Turingmachines staat. Zij a een element uit het bandalfabet. Toon aan met een reductie naar het halting probleem dat $\{\langle M \rangle : a \in L(M)\}$ semibeslisbaar maar niet beslisbaar is.

Oefeningen

1. Welke van de volgende talen is regulier? Bewijs uw bewering.

   (a) $L_1 = \{ww^Rww^nw^nw^R : w \in \{a,b,c\}^* \& n > 0 \& |w|^{2501} + n < 10^{10^{10}}\}$

   (b) $L_2 = \{w \in \{a,b,c\}^* : \#_c w$ is even en $\#_a w + \#_b w < 7\}$

   (c) $L_3 = \{w \in \{a,b,c\}^* : \#_c w$ is even en $\#_a w + \#_b w > \#_c w\}$

   (d) $L_4 = \{w \in \{0,1,\ldots,9\} : w$ representeert een getal dat deelbaar is door $5\}$

2. Beschouw termen van de volgende vorm:

   i) $0 \in T$

   $t_1 + 1$

   ii) Als $t_1, t_2 \in T$ dan ook $S(t_1), (t_1 + t_2) \in T$ en $(t_1 \times t_2) \in T$

   T bevat enkel elementen van deze vorm.

   (a) Bewijs dat T context-vrij, maar niet regulier is.

   (b) Geef een Turing machine die de waardes van deze termen berekent (waarbij $+$, $\times$ en S de standaard interpretaties krijgen en de uitvoer in unaire notatie, zoals in de oefeningenles, is)

3. Is de volgende taal context-vrij? Bewijs uw antwoord.

   $L_5 = \{w \in \{a,b,c,d\}^* : \#_a w$ is groter dan 0 en deelbaar door 7 en $\#_b w = \#_c w = \#_d w\}$

Examen Formele Talen, Automaten en Complexiteit, groep B

14 juni 2011

Theorie

1. Zij Σ een eindig alfabet en L een reguliere taal over Σ. Toon aan dat $\{w \in \Sigma^* : w$ is een deelrij (subsequence) van een element uit $L\}$ regulier is.

2. Zij $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$. Toon aan dat $L = \{0^n 1^j 2^j 3^{3n} : j, n \geq 1\}$ contextvrij is maar dat $\frac{1}{2}L := \{u \in \Sigma^* : (\exists v \in \Sigma^*)[|u| = |v|$ en $uv \in L]\}$ niet contextvrij is.

3. Neem volgens de afspraak van het boek (of de les) aan dat $\langle M \rangle$ voor coderingen van Turingmachines staat. Zij a een element uit het bandalfabet. Toon aan met een reductie naar $\neg H$ dat $\{\langle M \rangle : L(M) = \{a\}\}$ niet semibeslisbaar is.

4. Zij L de taal die bestaat uit de Boolese formules w in conjunctieve normaalvorm met m variabelen en k clausules waarbij $k \geq 2^m$. Toon aan dat $L \in P$.

Oefeningen

1. Welke van de volgende talen ~~is~~ zijn regulier? Bewijs uw bewering.
   (a) $L_1 = \{ww^R : w \in \{a,b,c\}^* \& \#_a w + \#_b w + 2 \cdot \#_c w \leq 2501\}$
   (b) $L_2 = \{w \in \{a,b,c\}^* : \#_c w$ is even en $\#_a w + \#_b w$ is deelbaar door $7\}$
   (c) $L_3 = \{w \in \{a,b,c\}^* : \#_c w$ is even en $\#_a w + \#_b w < \#_c w\}$
   (d) $L_4 = \{w \in \{0,1,\ldots,9\} : w$ representeert een getal dat deelbaar is door $4\}$

2. Beschouw termen van de volgende vorm:
   i) $\{0,1\}^* \subset T$
   ii) Als $t_1, t_2 \in T$ dan ook $(t_1 + t_2) \in T$ en $(t_1 \times t_2) \in T$

   T bevat enkel elementen van deze vorm.
   (a) Bewijs dat T context-vrij, maar niet regulier is.
   (b) Geef een Turing machine die de waardes van deze termen berekent (waarbij $+$ en $\times$ de standaard interpretaties krijgen en de zinnen met alfabet $\{0,1\}$ binaire representaties van de natuurlijke getallen zijn.

3. Is de volgende taal context-vrij? Bewijs uw antwoord.

$$L_5 = \{w \in \{a,b,c,d\}^* : \#_b w = 11 \cdot \#_c w = \#_d w\}$$

Examen Formele Talen, Automaten en Complexiteit, groep C

15 juni 2011

Theorie

1. Zij Σ een eindig alfabet en L_1 en L_2 reguliere talen. Neem

$$\mathrm{L}_1 : \mathrm{L}_2 := \{x : \exists y \in L_2(xy \in L_1)\},$$

$$\mathrm{L}_1 \mid \mathrm{L}_2 := \{y : \exists x \in L_2(xy \in L_1)\}.$$

   Toon door constructie van een FDSM aan dat $\mathrm{L}_1 : \mathrm{L}_2$ en $\mathrm{L}_1 \mid \mathrm{L}_2$ regulier zijn.

2. Zij Σ een alfabet en voor ieder $a \in \Sigma$ een contextvrije taal L_a gegeven. Neem $s(a_0 \ldots a_n) = L_{a_0} \ldots L_{a_n}$ en $s(L) = \bigcup_{x \in L} s(x)$ voor taal L. Toon aan dat $s(L)$ contextvrij is als L dat is.

3. Zij $\Sigma = \{0, 1\}$. Toon aan dat er een contextvrije taal L over Σ bestaat zodat COPYREVERSE$(L) := \{w \in \Sigma^* : \exists x \in L[w = x^R x]\}$ niet contextvrij is. (Hint: Kies bijvoorbeeld: $L := W^R W$)

4. Neem volgens de afspraak van het boek (of de les) aan dat $\langle M \rangle$ voor coderingen van Turingmachines staat. Toon aan met een reductie tot het halting probleem dat $\{\langle M \rangle : M$ weigert (rejects) tenminste twee verschillende strings van even lengte$\} \notin D$.

Oefeningen

1. Welke van de volgende talen is regulier? Bewijs uw bewering.
   (a) $L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* : \#_c w$ is deelbaar door 7 en en $\#_a w + \#_b w$ is oneven $\}$
   (b) $L_1 = \{a^n b^{10n} : 0 < n + 7 \leq 1337\}$
   (c) $L_3 = \{b^n a^{10n} : 0 < n + 7 \geq 1337\}$
   (d) $L_4 = \{w \in \{0, 1, \ldots, 9\} : w$ representeert een getal dat deelbaar is door $10\}$

2. Beschouw termen van de volgende vorm:
   i) $0 \in T$
   ii) Als $t_1, t_2 \in T$ dan ook $S(t_1), (t_1 + t_2) \in T$ en $(t_1 \times t_2) \in T$

   T bevat enkel elementen van deze vorm.

   (a) Bewijs dat T context-vrij, maar niet regulier is.
   (b) Er bestaat voor iedere term t uit T een unieke term s_t van de vorm $s_t = S(\ldots S(0)\ldots)$ zodanig dat onder de standaard interpretaties $t^{\mathbb{N}} = s_t^{\mathbb{N}}$. Geef een Turing machine die $t \mapsto s_t$ berekent.

3. Is de volgende taal context-vrij? Bewijs uw antwoord.

$$L_5 = \{w \in \{a, b, c, d\}^* : \#_a w = \#_d w \cdot \#_b w = \#_c w\}$$

Examen Formele Talen, Automaten en Complexiteit, groep D

16 juni 2011

Theorie

1. Zij Σ een eindig alfabet en L een reguliere taal. Neem

   $$\text{THRICE}(L) := \{a_1a_1a_1a_2a_2a_2\ldots a_na_na_n : a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n \in L\}.$$

   Toon door constructie van een FDSM aan dat THRICE(L) regulier is. Volgt de bewering direct uit een stelling die in de les aan bod is gekomen? Indien ja, uit welke?

2. Zij $\Sigma = \{0,1\}$. Toon aan dat er een contextvrije taal L over Σ bestaat zodat COPYREVERSE(L) $:= \{w \in \Sigma^* : \exists x \in L[w = xx^R]\}$ niet contextvrij is. (Hint: Kies bijvoorbeeld: $L := WW^R$)

3. Toon aan met een reductie tot het complement van het halting probleem dat het volgend probleem niet semibeslisbaar is:
   Gegeven een Turingmachine M: Vraag: M accepteert precies twee zinnen x, y met $|x| \neq |y|$.

4. Zij T de verzameling van Boolese uitdrukkingen die een tautologie zijn. Toon aan dat $\neg$SAT $\leq_P$ T en bewijs dat $\neg$T NP-compleet is.

Oefeningen

1. Welke van de volgende talen zijn regulier? Bewijs uw bewering.
   (a) $L_2 = \{a^nb^mc^k : n \text{ is deelbaar door 7 en } m+k \text{ is oneven }\}$
   (b) $L_1 = \{a^nb^{9n} : 0 < n^{1337} \leq 2501^{2501}\}$
   (c) $L_3 = \{b^na^{9n} : 0 < n^{1337} \geq 2501^{2501}\}$
   (d) $L_4 = \{w \in \{a,b\}^* : |w| > 3 \text{ en } \#_a w \text{ is deelbaar door } 5\}$

2. Beschouw termen van de volgende vorm:
   i) $\{0,\ldots,9\}^+ \subset T$
   ii) Als $t_1, t_2 \in T$ dan ook $(t_1 + t_2) \in T$ en $(t_1 \times t_2) \in T$

   T bevat enkel elementen van deze vorm.

   haakjes zijn onderdeel v/d taal
   hint: Programmeer een rekenmachine

   (a) Bewijs dat T context-vrij, maar niet regulier is.
   (b) Geef een Turing machine die de waardes van de termen uit T berekent (waarbij + en $\times$ de standaard interpretaties krijgen).

3. Is de volgende taal context-vrij? Bewijs uw antwoord.

   $$L_5 = \{w \in \{a,b,c,d\}^* : \#_a w = (\#_d w)^{\#_b w} = \#_c w\}$$

Examen Formele Talen, Automaten en Complexiteit, groep E

16 juni 2011

Theorie

1. Neem:

$$L_1 := \{w \in \{a,b\}^* : \exists x \in \{a,b\}^+ : w = xx^Rx\}$$

en

$$L_2 := \{uww^Rv \in \{a,b\}^* : u,v,w \in \{a,b\}^+\}$$

Onderzoek of L_1 of L_2 regulier is en bewijs uw beweringen.

2. Is

$$\{xwx^R : x,w \in \{a,b\}^+ \; \& \; |\, x \,| \; = \; |\, w \,|\}$$

contextvrij? Geef een bewijs voor uw bewering.

3. Toon aan met een reductie tot het complement van het halting probleem dat het volgend probleem niet semibeslisbaar is:
Gegeven een Turingmachine M: Vraag: $L(M)$ is oneindig.

4. Toon aan dat DSAT bestaande uit de verzameling van vervulbare Boolese uitdrukkingen in disjunctieve normaalvorm een element van de complexiteitsklasse P is.

Oefeningen

1. Welke van de volgende talen zijn regulier? Bewijs uw bewering.

   (a) $L_2 = \{a^nb^mc^k : n \text{ is even en } m+k \text{ is deelbaar door } 8\}$

   (b) $L_1 = \{a^nb^{n^n} : 0 < n^{2501} \leq 1337^{1337}\}$

   (c) $L_3 = \{b^na^{n^n} : 0 < n^{2501} \geq 1337^{1337}\}$

   (d) $L_4 = \{w \in \{a,b\}^* : |w| > \#_a w\}$

2. Beschouw termen van de volgende vorm:

   i) $0 \in T$

   ii) Als $t_1, t_2 \in T$ dan ook $S(t_1) \in T$ en $f(t_1, t_2) \in T$.

   T bevat enkel elementen van deze vorm.

   (a) Bewijs dat T context-vrij, maar niet regulier is.

   (b) Geef een Turing machine die de waardes van de termen uit berekent, gegeven dat f wordt geïnterpreteerd door $(x,y) \mapsto x^y$ (met $0^0 = 1$) en S door $x \mapsto x+1$ (deze waardes zijn in unaire notatie, als in de oefeningenlessen).

3. Is de volgende taal context-vrij? Bewijs uw antwoord.

$$L_5 = \{w \in \{a,b,c,d\}^* : \#_a w = |\#_d w - \#_b w| = \#_c w\}$$