Proefexamenvraagen Bewijstheorie

Master Wiskunde - UGent

Eerste examenperiode 2010-2011

Oefening 1. Bereken de Cantor normaal vorm van $(\omega^2+\omega+1)^{(\omega^2+\omega+1)^2}$

Definition 1. Zij $\prec$ een goed gefundeerde ordening op $\mathbb{N}$. Voor $U \subseteq \mathbb{N}$ zij

$$|n|_U := \sup\{|i|_U + 1 : i \prec n \wedge i \notin U\}.$$

Zij

$$U^\alpha := \{n \in \mathbb{N} : |n|_U < \alpha\} \cup U.$$

Stel

$$\models_U^\alpha A :\Longleftrightarrow (\mathcal{N}, U^\alpha) \models A$$

en

$$\models_U^\alpha \{A_1, \ldots, A_k\} :\Longleftrightarrow \models_U^\alpha A_1 \vee \ldots \vee A_k.$$

Oefening 2. Stel $U' := U \cup \{m_0\}$.

1. $|n|_U \leq |n|_{U'} + 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ (Hint: $\neg m_0 \prec n \Rightarrow |n|_U = |n|_{U'}$.)
2. $|m_0|_U \leq \alpha_0 < \alpha \Rightarrow (U')^{\alpha_0} \subseteq U^\alpha$.

Oefening 3. Toon aan: Als $Z^\infty \vdash_1^\alpha \neg Prog_\prec(X), \neg X s_1, \ldots, \neg X s_k, \Gamma$ dan $\models_U^\alpha \Gamma$ waarbij $U := \{s_1^\mathcal{N}, \ldots, s_k^\mathcal{N}\}$.

Kan men daarmee het boundedness-stelling voor transitieve goed gefundeerde ordeningen verscherpen?