Examen Kwantummechanica 1: 10 januari 2011

THEORIE

ANTWOORD BONDIG EN GEVAT !

- definitie van de Bohr straal

$$a_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2}$$

- definitie van een δ functie

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk \exp ikx$$

1. VRAAG 1 (10 PUNTEN)

   - Beschouw de genormeerde eigenfuncties $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_N(x)$ van de hermitische Hamiltoniaan $H(x, p_x)$: $H\psi_k = E_k\psi_k \quad (1 \leq k \leq N)$

     (a) Bepaal de matrixrepresentatie van de operatoren x en H^2 in de basis van de eigenfuncties van de operator H.

     (b) Toon aan dat voor een arbitraire hermitische operator Q en toestand $\psi_k(x) \quad (1 \leq k \leq N)$ de volgende gelijkheid geldt

     $$< \psi_k \mid Q^2 \mid \psi_k >= \sum_{j=1}^{j=N} |< \psi_k \mid Q \mid \psi_j >|^2$$

     (c) Veronderstel dat voor een operator Q de volgende uitdrukking geldt

     $$< \psi_k \mid Q \mid \psi_k >= \sum_{j=1}^{j=N} E_j^2 \, |< \psi_k \mid x \mid \psi_j >|^2 \ .$$

     Bepaal een uitdrukking voor Q LOUTER in termen van de twee operatoren (H, x).

   - Start van de meest algemene vorm van het onzekerheidsbeginsel van Heisenberg

     $$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

     om op een KWALITATIEVE MANIER de grondtoestandsenergie van het waterstofatoom af te leiden. Welke grondtoestandsenergie zou je verwachten binnen de context van de klassieke fysica?

2. VRAAG 2 (20 PUNTEN) *MONDELING EXAMEN*

Examen Kwantummechanica I: 10 januari 2011

OEFENINGEN

BIJ HET OPLOSSEN VAN HET OEFENINGENGEDEELTE MOGEN ENKEL DE CURSUSNOTA'S (TRANSPARANTEN) EN HET HANDBOEK "QUANTUM MECHANICS" VAN BRANSDEN EN JOACHAIN GEBRUIKT WORDEN.

OEFENING 1 (10 PUNTEN)

Beschouw een deeltje met massa m dat beweegt in één dimensie onder de invloed van een potentiaal van het type

$$\begin{aligned} V(x) &= +\infty \qquad x \in \left]-\infty, 0\right[\\ V(x) &= 0 \qquad x \in [0, L] \\ V(x) &= +\infty \qquad x \in \left]L, +\infty\right[\ . \end{aligned}$$

Het deeltje wordt in een toestand gebracht beschreven door de golffunctie

$$\Psi(x, t = 0) = \psi_3(x) \ ,$$

met $\psi_3(x)$ de golffunctie horend bij de tweede aangeslagen toestand.

1. Maak een schets van $\Psi(x, t = 0)$ als functie van x.
2. Op een tijdstip t oefent men een meting uit om het deeltje te localiseren. Bij welke positie(s) heeft men de grootste kans om het deeltje te vinden? Bij welke positie(s) heeft men de minste kans om het deeltje te vinden?
3. Bereken $\langle H \rangle$ en $\langle p_x^2 \rangle$ voor het deeltje.
4. Bereken de waarschijnlijkheidsstroomdichtheid $j(x, t)$ voor het deeltje en toon aan dat $j(x, t)$ voldoet aan de continuïteitsvergelijking.
5. Bereken (Δx) en (Δp_x) voor het deeltje. Ligt het resultaat in de lijn van je verwachtingen? Verklaar je antwoord.

OEFENING 2 (10 PUNTEN)

Beschouw de linear harmonische oscillator in één dimensie. De energie-eigenfuncties worden gegeven door $|E_n\rangle$.

- Bewijs de volgende gelijkheid voor een systeem dat zich in een toestand $|E_n\rangle$ bevindt:

$$\Delta x \; \Delta p_x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar \; .$$

- Beschouw nu de genormeerde eigenfuncties $|\alpha\rangle$ van de operator a_-

$$a_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x + i\frac{p_x}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right] \; .$$

  Dit betekent dat

$$a_- \, |\alpha\rangle = \alpha \, |\alpha\rangle \; ,$$

  met α **een complex getal**.

  1. Bereken $\langle x^2\rangle$, $\langle x\rangle$, $\langle p_x\rangle$ en $\langle p_x^2\rangle$ voor de toestand $|\alpha\rangle$ (TIP: herinner dat $a_+ = a_-^\dagger$) .
  2. Toon aan dat voor de toestanden $|\alpha\rangle$ het merkwaardige resultaat geldt dat

$$\Delta x \; \Delta p_x = \frac{\hbar}{2} \; .$$

- De toestanden $|\alpha\rangle$ kunnen ontwikkeld worden in termen van de energie-eigenfuncties $|E_n\rangle$

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n \, |E_n\rangle \; .$$

  Toon aan dat de expansie-coëfficiënten c_n gegeven worden door

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0 \; .$$

  Met welke methode kun je de c_0 te bepalen?

From "Understanding Quantum Physics: A User's Manual"
by Michael A. Morrison
(Addison Wesley, 1990)

Indefinite Integrals

$$\int x \sin bx \, dx = \frac{1}{b^2} \sin bx - \frac{x}{b} \cos bx$$

$$\int x e^{bx} \, dx = \frac{e^{bx}}{b^2} (bx - 1)$$

$$\int x^2 e^{bx} \, dx = e^{bx} \left(\frac{x^2}{b} - \frac{2x}{b^2} + \frac{2}{b^3} \right)$$

$$\int x^n e^{ax} \, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\int \sin \frac{x}{a} dx = -a \cos \frac{x}{a}$$

$$\int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x$$

$$\int x^2 \sin x \, dx = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} = \frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2}$$

$$\int x \sin^2 x \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8}$$

$$\int \sin^3 x\, dx = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x$$

$$\int x \cos x\, dx = \cos x + x \sin x$$

$$\int x^2 \cos x\, dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} = \frac{x}{2} + \frac{\sin x \cos x}{2}$$

$$\int x \cos^2 x\, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8}$$

$$\int x^2 \cos^2 x\, dx = \frac{x^3}{6} + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\right) \sin 2x + \frac{x \cos 2x}{4}$$

$$\int \cos^3 x\, dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$$

$$\int x \cos^3 x\, dx = \frac{x \sin 3x}{12} + \frac{\cos 3x}{36} + \frac{3}{4} x \sin x + \frac{3}{4} \cos x$$

$$\int \sin x \cos^2 x\, dx = -\frac{\cos^3 x}{3}$$

$$\int \sin^2 x \cos x\, dx = \frac{\sin^3 x}{3}$$

$$\int \tan^2 x\, dx = \tan x - x$$

$$\int \cot^2 x\, dx = -\cot x - x$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right]$$

Integrals from 0 *to* ∞ *[for* $a > 0$*]*

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}, \quad n > -1$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$