Examen Kwantummechanica

2010-2011, eerste zittijd, 3de Bachelor Fysica en Sterrenkunde

28 januari 2011, 14:00

Theorie

1. Gegeven de radiale Schrödinger vergelijking van het waterstofatoom:

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\right] R_{El}(r) = 0$$

Los het energie-eigenwaardeprobleem op en bepaal het spectrum met bijbehorende degeneratie.
Hint: Ga over op de dimensieloze grootheden

$$\rho = \sqrt{-\frac{8\mu E}{\hbar^2}}\, r, \qquad n = \frac{e^2}{\hbar}\sqrt{-\frac{\mu}{2E}}.$$

2. Los het verstrooiingsprobleem van een deeltje in een potentiaal V:

$$\left(\Delta + k^2\right)\psi(\boldsymbol{r}) = U(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})$$

met

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \qquad U(\boldsymbol{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(\boldsymbol{r}),$$

op met behulp van een gepaste Greense functie. Geef ook de uitdrukking voor de verstrooiingsamplitude $f(k, \Omega)$.

Oefeningen

1. *Heisenbergse bewegingsvergelijkingen voor een elektron in een magnetisch veld:*
De Hamiltoniaan van een elektron met spin 1/2 dat in het xy-vlak beweegt en onderworpen wordt aan een constant magnetisch veld B in de z-richting wordt gegeven door

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}\left(\widehat{p}_x + \frac{eB}{2c}\widehat{y}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\widehat{p}_y - \frac{eB}{2c}\widehat{x}\right)^2 + \frac{e}{mc}\widehat{S}_z B \tag{1}$$

met $\boldsymbol{S} = \hbar/2\boldsymbol{\sigma}$ de elektronspin en $\boldsymbol{\sigma}$ de Pauli-matrices.

(a) Gebruik de Heisenbergse bewegingsvergelijking om operatoren $\widehat{v}_x(t)$ en $\widehat{v}_y(t)$ te definiëren als

$$\widehat{v}_x(t) = \frac{\mathrm{d}\widehat{x}(t)}{\mathrm{d}t}, \qquad \widehat{v}_{\cancel{x}\,y}(t) = \frac{\mathrm{d}\widehat{y}(t)}{\mathrm{d}t}.$$

(b) Bepaal nu de Heisenbergse bewegingsvergelijkingen voor

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{v}_x(t)}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}\widehat{v}_y(t)}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}\widehat{S}_x(t)}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}\widehat{S}_y(t)}{\mathrm{d}t}.$$

niet opl. rechterlid uitwerken

$$\hat{S}\cdot\hat{v} = kt + \hat{S}\cdot\hat{v}(0)$$

(c) Bepaal tot slot ook de Heisenbergse bewegingsvergelijkingen voor

ook bewegingsvgl oplossen

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}}{\mathrm{d}t} = k \qquad \text{met } \hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}} = \hat{S}_x\hat{v}_x + \hat{S}_y\hat{v}_y$$

$$\frac{\mathrm{d}(\hat{\boldsymbol{S}}\times\hat{\boldsymbol{v}})_z}{\mathrm{d}t} \qquad \text{met } (\hat{\boldsymbol{S}}\times\hat{\boldsymbol{v}})_z = \hat{S}_x\hat{v}_y - \hat{S}_y\hat{v}_x$$

waarbij je de voorgaande resultaten kan gebruiken. Los de bewegingsvergelijkingen voor deze laatste twee operatoren op in functie van hun waarden op tijdstip $t = 0$: $\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}(0)$ en $(\hat{\boldsymbol{S}}\times\hat{\boldsymbol{v}})_z(0)$

2. *Deeltje in een zwaartekrachtveld:*
Beschouw een ééndimensionaal deeltje dat enkel in een verticale richting z kan bewegen. Het is onderworpen aan een constante zwaartekracht $-mg\boldsymbol{e}_z$, zodat de potentiaal gegeven wordt door

$$V(z) = \begin{cases} mgz, z > 0 \\ \infty, z < 0 \end{cases}.$$

De oneindige potentiaalbarrière bij $z < 0$ stelt het aardoppervlak door, dat voor dit deeltje ondoordringbaar is. De totale Hamiltoniaan is dus $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + V(z)$.

(a) Bepaal de minimale energie van dit deeltje met behulp van het variationele principe, waarbij je als variationele ansatz de testfunctie

$$\psi(z) = \begin{cases} 0, z < 0 \\ Nz\exp(-\kappa z), z > 0 \end{cases}$$

gebruikt. Bepaal eerst N zodat deze golffunctie genormaliseerd is, en zoek dan de optimale κ zodat die de verwachtingswaarde van de energie minimaliseert. Geef ook de waarde van de energie bij deze optimale waarde voor κ.

(b) Controleer Heisenberg onzekerheidsprincipe voor de gevonden toestand. Bepaal

$$\langle\psi|\hat{z}|\psi\rangle \qquad \langle\psi|\hat{z}^2|\psi\rangle \qquad \langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle \qquad \langle\psi|\hat{p}^2|\psi\rangle$$

en bereken $\Delta z\Delta p$ met

$$\Delta z^2 = \langle\psi|\hat{z}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{z}|\psi\rangle^2,$$
$$\Delta p^2 = \langle\psi|\hat{p}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle^2.$$