EXAMEN LINEAIRE ALGEBRA
EN ANALYTISCHE MEETKUNDE I

MAANDAG 17 JANUARI 2011

1. Theorie

Opgave 1. (a) In Voorbeelden 2.1.17 (7) wordt gesteld dat de maximale lineair onafhankelijke deelverzamelingen van een vectorruimte V juist de basissen zijn in V. Men kan basissen ook karakteriseren als de minimale voortbrengende verzamelingen.

Toon aan dat een deelverzameling S van een vectorruimte V een basis is voor V als en slechts als S een minimale voortbrengende verzameling is voor V.

(Een minimale voortbrengende verzameling S voor een vectorruimte V is per definitie een voortbrengende verzameling voor V zodat voor alle $S' \subsetneq S$, $\text{span}(S') \neq V$.)

(b) Zij $g : V \to W$ een lineaire afbeelding tussen twee K-vectorruimten. Als er een verzameling $\mathcal{T}$ in V bestaat zodat $\{g(v) | v \in \mathcal{T}\}$ een voortbrengend stel is voor de ruimte W, dan is de lineaire afbeelding g surjectief. Bewijs dit!

(d) Verklaar de volgende uitspraken uit het bewijs van het bestaan van een Jordan basis (Stelling 5.3.5):

(i) *Het deel van* $\ker f$ *dat in het complement zit van* $\operatorname{im} f$ *heeft dimensie* $n - d - e$. (Zie blz. 92 bovenaan.)

(ii) *De oorspronkelijke gelijkheid wordt*

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_i v_i = - \sum_{i=1}^{n-d-e} \gamma_i u_i \, .$$

Het linker- en rechterlid van deze gelijkheid moeten nul zijn vermits het linkerlid een element is van $\operatorname{im} f$ *en het rechterlid in het complement zit van* $\operatorname{im} f$.(Zie blz. 92, lijn -17).
Je moet dus verklaren waarom

$$\text{span}(\{u_1, \ldots, u_{n-d-e}\}) \cap \text{span}(\{v_1, \ldots, v_d\}) = \{0\} \, .$$

Antwoord 1. (a) Zij V een K-vectorruimte en S een minimale voortbrengende verzameling voor V.

Elke minimaal voortbrengende verzameling voor V is een basis in V.

Zij S een minimaal voortbrengende verzameling. We moeten aantonen dat S lineair onafhankelijk is. (Als dat zo is dan is S een basis, vermits het dan een lineair onafhankelijke en voortbrengende verzameling is.)

We onderstellen dat S een lineair afhankelijke verzameling is (en leiden hieruit een tegenspraak af). Er bestaat dan een relatie

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m = 0$$

met $\lambda_i \in K, \lambda_i \neq 0$, $v_i \in S$. Dus

$$v_m = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_m} v_i.$$

Voor de verzameling $S' = S \setminus \{v_m\} \subset S$ geldt dan, vermits $v_m \in \operatorname{span} S'$, dat

$$V = \operatorname{span} S \subset \operatorname{span} S' \subset \operatorname{span} S = V.$$

Dus $\operatorname{span} S' = V$ maar dan is S' een voortbrengende verzameling voor V en $S' \subsetneq S$, wat in tegenspraak is met de hypothese dat S een minimale voortbrengende verzameling is.

Een basis B in V is een minimaal voortbrengende verzameling.

We moeten aantonen dat geen enkele echte deelverzameling van B een voortbrengende verzameling is.

Zij $T \subsetneq B$ dan is T een lineair onafhankelijk verzameling (een lineaire relatie tussen de elementen van T is immers een lineaire relatie tussen elementen van B). Zij $b \in B \setminus T$ dan is $b \notin \operatorname{span} T$ (vermits uit $b = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i$ met $b_i \in T$ zou volgen dat er een niet triviale lineaire relatie bestaat tussen de elementen van B, en dit is niet zo want B is een basis). Dus T is geen voortbrengend stel voor V.

Opmerking: Als V een eindig dimensionale vectorruimte is, stel $\dim V = n$, dan volgt uit lemma 2.1.19 dat een minimaal voortbrengend stel n elementen heeft. En vermits elke basis n elementen heeft en uit stelling 2.1.20 volgt dat elk voortbrengend stel een basis bevat kan men dan besluiten dat de minimaal voortbrengende stellen juist de basissen zijn in V.

(b) Zij $g : V \to W$ een lineaire afbeelding en $T \subset V$ zodat $\operatorname{span}(\{g(v) | v \in T\}) = W$.

We moeten aantonen dat voor alle $w \in W$ er een $v \in V$ bestaat zodat $g(v) = w$.

Zij $w \in W$ dan is $w \in \operatorname{span}(\{g(v) | v \in T\})$ dus $w = \sum_{i=1}^m \lambda_i g(v_i)$ met $\lambda_i \in K$ en $v_i \in V$. Uit de lineariteit van g volgt $w = g(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i) = g(v)$ met $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \in V$.

(c) (i) Zij $\ker f = (\ker f \cap \operatorname{im} f) \oplus (\ker f \cap \operatorname{im} f)^c$ waarbij we dus een complement van $\ker f \cap \operatorname{im} f$ beschouwen in de ruimte $\ker f$.

We zoeken $\dim(\ker f \cap \operatorname{im} f)^c$. Uit stelling 2.1.31 volgt dat

$$\dim(\ker f \cap \operatorname{im} f)^c = \dim \ker f - \dim(\ker f \cap \operatorname{im} f) = \dim \ker f - e.$$

Uit stelling 2.2.13 volgt dat

$$\dim \ker f = \dim V - \dim \operatorname{im} f = n - d.$$

Dus $\dim(\ker f \cap \operatorname{im} f)^c = n - d - e$.

(ii)

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_i v_i = - \sum_{j=1}^{n-d-e} \gamma_j u_j \,.$$

met $\{v_i\}_{i=1,\dots,d}$ een basis voor $\operatorname{im} f$ en $\{u_j\}_{j=1,\dots,n-d-e}$ een basis voor $(\ker f \cap \operatorname{im} f)^c$ (het complement genomen in de ruimte $\ker f$).

We moeten aantonen dat beide leden van de gelijkheid gelijk zijn aan nul. Het linkerlid is een element van $\operatorname{span}(\{v_1, \dots, v_d\})$ en het rechterlid is een element van $\operatorname{span}(\{u_1, \dots, u_{n-d-e}\})$. Het is dus voldoende aan te tonen dat $\operatorname{span}(\{u_1, \dots, u_{n-d-e}\}) \cap \operatorname{span}(\{v_1, \dots, v_d\}) = \{0\}$.

Zij $y \in \operatorname{span}(\{u_1, \dots, u_{n-d-e}\}) \cap \operatorname{span}(\{v_1, \dots, v_d\})$. Dan is $f(y) = 0$ vermits $\operatorname{span}(\{u_1, \dots, u_{n-d-e}\}) \subset \ker f$. En $y \in \operatorname{im} f$ vermits $\operatorname{span}(\{v_1, \dots, v_d\}) = \operatorname{im} f$. Dus $y \in \ker f \cap \operatorname{im} f$, maar $y \in \operatorname{span}(\{u_1, \dots, u_{n-d-e}\}) = (\ker f \cap \operatorname{im} f)^c$. Dan is $y = 0$ daar $(\ker f \cap \operatorname{im} f) \cap (\ker f \cap \operatorname{im} f)^c = \{0\}$ (zie lemma 2.1.31).

Opgave 2. Bij de classificatie van kwadrieken in $\mathbb{R}^3$ hebben we gezien dat het belangrijk is om te weten of een kwadriek een middelpunt heeft.

(a) Een centrale kwadriek is een kwadriek die een uniek middelpunt heeft. Bovenaan op p. 128 in de nota's van 2010-2011 (op pagina 122 in de nota's van 2009-2010) staat dat een kwadriek dan en slechts dan centraal is als $\det(A_0) \neq 0$. Verklaar dit.

(b) Waarom zijn er geen kwadrieken die een eindig aantal middelpunten hebben groter dan 1?

(c) Zij $\mathcal{Q}$ een kwadriek, en veronderstel dat p en q twee verschillende middelpunten van $\mathcal{Q}$ zijn. Toon aan dat je bij reductie door translatie naar het middelpunt p enerzijds, en bij reductie door translatie naar het middelpunt q anderzijds, precies dezelfde gereduceerde vergelijking bekomt.

(d) Wat zijn de mogelijkheden voor het aantal middelpunten van een *singuliere* kwadriek? Geef een voorbeeld voor elk van de mogelijkheden die je opgeeft, en een verklaring voor elk van de mogelijkheden die je niet opgeeft.

2. Oefeningen

Opgave 3. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

Bepaal de Jordan normaalvorm van A. Bepaal eveneens een matrix Q zodanig dat $Q^{-1}AQ$ gelijk is aan de Jordan normaalvorm van A.

Antwoord 2. De matrix A is symmetrisch, dus we weten dat hij diagonaliseerbaar is. De Jordan normaalvorm is bijgevolg een diagonaalmatrix en een Jordanbasis een basis van eigenvectoren.

Het karakteristiek polynoom is $(x-4)(x+2)^2$, er zijn dus twee eigenwaarden $\lambda_1 = 4$ met algebraïsche multipliciteit 1 en $\lambda_2 = -2$ met algebraïsche multipliciteit 2.

Aangezien A diagonaliseerbaar is, is de Jordan normaalvorm

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

De eigenruimte bij λ_1 is

$$\{\begin{pmatrix} s \\ s \\ s \end{pmatrix} | s \in \mathbb{C}\},$$

de eigenruimte bij λ_2 is

$$\{\begin{pmatrix} t \\ s \\ -t-s \end{pmatrix} | t, s \in \mathbb{C}\}.$$

Een basis van eigenvectoren is

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Een mogelijke Q is

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 4. Beschouw in de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^4$ een hypervlak H bepaald door de vergelijking $2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0$ en de affiene deelruimte D bepaald door de punten $(2, 0, 0, 0)$, $(1, -1, 0, 5)$, $(2, 1, 0, 0)$ en $(1, 0, 0, 5)$.

(i) Vind een voorstelling van D in termen van plaats- en richtingsvectoren. Bepaal de dimensie van D.

(ii) Toon aan dat D parallel is aan het hypervlak H.

(iii) Vind een element van de Euclidische groep $\phi \in \mathsf{E}(4)$ waarvoor $\phi(D) \subseteq H$ en $\phi(D)$ parallel is aan D.

Antwoord 3. (i) Stellen we $p_1 = (2, 0, 0, 0)$, $p_2 = (1, -1, 0, 5)$, $p_3 = (2, 1, 0, 0)$ en $p_4 = (1, 0, 0, 5)$, dan is de onderliggende deelruimte D_0 juist de ruimte voortgebracht door alle richtingsvectoren van D. Deze wordt voortgebracht door $r_1 = p_2 - p_1 = (-1, -1, 0, 5)$, $r_2 = p_3 - p_1 = (0, 1, 0, 0)$ en $r_3 = p_4 - p_1 = (-1, 0, 0, 5)$. De dimensie van D is nu per definitie juist gelijk aan de dimensie van D_0 als vectorruimte. Vermits $r_1 + r_2 = r_3$ zijn de drie gevonden richtingsvectoren niet lineair onafhankelijk, maar r_1 en r_2 zijn wil lineair onafhankelijk. Bijgevolg is de dimensie van D_0 en dus ook die van D gelijk aan twee. Hieruit kunnen we ook direct besluiten dat elk punt van D te schrijven $p_1+\lambda_1 r_1+\lambda_2 r_2$ voor een zekere $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (zie cursus p.111 Definitie 6.4.3.).

(ii) Twee affiene deelruimten D en H zijn parallel als en slechts dan als voor hun onderliggende deelruimten geldt dat ofwel $D_0 \leq H_0$ ofwel $H_0 \leq D_0$. Vermits de dimensie van D_0 kleiner is dan die van H_0, moeten we bijgevolg aantonen dat $D_0 \leq H_0$. Het volstaat aan te tonen dat de vectoren die D_0 voortbrengen (in ons geval zijn dit r_1 en r_2) behoren tot H_0. We merken op dat H_0 bepaald wordt door de vergelijking $2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ en dat zowel r_1 als r_2 aan deze vergelijking voldoen.

(iii) Vermits D parallel is aan H, weten we zeker dat er een translatie T_v bestaat, die D omzet in een affiene ruimte bevat in H. Kiezen we een willekeurige vector $p = (0,0,0,1) \in H$, dan voldoet $v := p - p_1$. Immers, het hypervlak H is ook te schrijven als $p + H_0$. Vermits $T_v(D) = T_v(p_1 + D_0) = T_v(p_1) + D_0 = p_1 + (p - p_1) + D_0$ en $D_0 \leq H_0$, volgt hieruit dat $T_v(D) \subset H$.

Opgave 5. Stel V een complexe inproduct-ruimte, met inproduct $\langle .,. \rangle$ (zie Definitie 6.1.1, in de nota's 2010-2011 en in de nota's 2009-2010). We beschouwen $n \geq 1$ vectoren $v_1, \dots, v_n \in V$. Definieer de volgende matrix

$$A = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \dots & \langle v_n, v_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle v_1, v_n \rangle & \langle v_2, v_n \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Toon aan dat de matrix A inverteerbaar is als en slechts dan als $\{v_1, \dots, v_n\}$ lineair onafhankelijk is.

Antwoord 4.

$\underline{\Rightarrow}$: We bewijzen dit uit het ongerijmde en tonen aan dat als $\{v_1, \dots, v_n\}$ niet lineair onafhankelijk (m.a.w lineair afhankelijk) zijn, A niet inverteerbaar is.

Als $\{v_1, \dots, v_n\}$ lineair afhankelijk bestaan er $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die niet allemaal nul zijn waarvoor

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0.$$

We noteren de k^{de} kolom van A met A_k. Het volgt uit de additiviteit en lineariteit in het eerste lid van het inproduct dat

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = \begin{pmatrix} \langle 0, v_1 \rangle \\ \langle 0, v_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle 0, v_n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dus de kolommen van A zijn lineair afhankelijk, hieruit volgt dat (zie stelling 4.3.5) $\det(A) = 0$ en dat A niet inverteerbaar is.

$\Leftarrow$: We bewijzen dit uit het ongerijmde en tonen aan dat als A niet inverteerbaar, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ niet lineair onafhankelijk (m.a.w lineair afhankelijk) zijn.

Als A niet inverteerbaar is is $\det(A) = 0$ en de kolommen van A zijn lineair afhankelijk. Dus er bestaan $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die niet allemaal nul zijn waarvoor

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Uit de additiviteit en lineariteit in het eerste lid van het inproduct volgt dat

$$\begin{pmatrix} \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, v_1 \rangle \\ \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, v_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, v_n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hieruit concluderen we dat voor iedere $k \in [1, n]$

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, v_k \rangle = 0.$$

We tonen aan dat hieruit moet volgen dat $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$ of dus dat de v_i's lineair afhankelijk zijn.

Uit het positief definiet zijn van het inproduct volgt dat het voldoende is om aan te tonen dat

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \rangle = 0.$$

Dit laatste geldt aangezien

$$\begin{aligned} \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \rangle &= \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_j} (\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, v_j \rangle) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_j} (0) = 0. \end{aligned}$$