EXAMEN THEORIE "LINEAIRE ALGEBRA EN ANALYTISCHE MEETKUNDE 2", ACADEMIEJAAR 2010-2011, eerste zittijd

Lesgever: Prof. Dr. K. Thas

VRAAG 1 — AFFIENE RUIMTEN. Onderstel dat V een $\mathbb{K}$-vectorruimte is, met $\mathbb{K}$ een veld, en stel dat A de affiene ruimte is geassocieerd aan V. Is de doorsnede van een willekeurig aantal deelruimten van A opnieuw een affiene ruimte? (Motiveer/bewijs je antwoord.)

Definieer de begrippen *dilatatie, homothetie* en *translatie* (voor een gegeven affiene ruimte E). Toon aan dat een dilatatie steeds een translatie of een homothetie is. Wat zijn dus de mogelijke configuraties van fixrechten van een dilatatie?

VRAAG 2 — KWADRATISCHE VORMEN. Geef de definitie van *kwadratische vorm* (over een veld $\mathbb{K}$ met $\mathrm{kar}(\mathbb{K}) \neq 2$). Klasseer nu (met bewijs) de kwadratische vormen over $\mathbb{R}$ (traagheidswet van Sylvester).

Beschouw vervolgens de kwadratische vorm
(1)

$$q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} (-i)^i x_i^2 = -x_1^2 + 4x_2^2 + \cdots + (-n)^n x_n^2,$$

waarbij $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Bepaal de discriminant van q.

Oefeningenexamen Lineaire Algebra en Analytische Meetkunde II

1ste Bachelor Wiskunde

Eerste examenperiode 2010-2011
15 juni 2011

1. Gegeven in $\mathrm{AG}(6, q)$ een 3-dimensionale affiene ruimte U en een affiene rechte L die zwak parallel is met U en zodat $L \not\subset U$. Laat $\mathcal{S}$ de verzameling zijn van alle affiene vlakken die zwak parallel zijn met U en geen punt gemeen hebben met L.

   (a) Hoe groot is $\mathcal{S}$?

   (b) Zij $M \in \mathcal{S}$. Hoeveel affiene hypervlakken in $\mathrm{AG}(6, q)$ bevatten zowel L als M? (Hou rekening met verschillende gevallen.)

2. Beschouw $\mathrm{AG}(3, 4)$. We bouwen $\mathrm{GF}(4)$ op als $\mathrm{GF}(2)[t]/(t^2 + t + 1)$. Beschouw de drie vlakken H_1, H_2 en H_3, gegeven door

$$\begin{aligned} H_1 &: tX_1 + X_2 + X_3 + (t + 1) = 0 \\ H_2 &: X_2 + tX_3 + 1 = 0 \\ H_3 &: X_1 + (t + 1)X_2 + X_3 + t = 0. \end{aligned}$$

   (a) Bepaal aan de hand van bundels het vlak door de punten $p = (1, t, 0)$ en $q = (t + 1, t, 1)$ en door $H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

   (b) Wat is de dimensie van $H_1 \cap H_2 \cap H_3$? Bepaal deze doorsnede expliciet.

   (c) Welke vlakken uit de bundel zouden, samen met H_1 en H_2, dezelfde bundel hebben bepaald?