Oefeningenexamen Projectieve Meetkunde: oplossingen

2de bachelor Wiskunde

academiejaar 2010-2011: eerste zittijd

Oefening 1. Beschouw in $PG(2, q)$ de verzameling kegelsneden $\mathcal{K} = \{C_{\lambda,\mu} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{F}_q, (\lambda, \mu) \neq (0, 0)\}$ waarbij de kegelsnede $C_{\lambda,\mu}$ wordt gegeven door de vergelijking

$$\lambda X_2^2 + \lambda X_0 X_1 + \mu X_0 X_2 + \mu X_1 X_2 = 0$$

(i) Hoeveel verschillende kegelsneden bevat $\mathcal{K}$? Hoeveel van deze exemplaren zijn absoluut reduciebel?

(ii) Toon aan dat er vier punten zijn die op elke kegelsnede van $\mathcal{K}$ liggen als q oneven is. Toon aan dat er drie punten P_1, P_2, P_3 zijn die op elke kegelsnede van $\mathcal{K}$ liggen als q even is.

(iii) Veronderstel dat q oneven is. Voor iedere absoluut reduciebele kegelsnede $C_{\lambda,\mu} \in \mathcal{K}$ die bestaat uit twee verschillende rechten, noemen we het snijpunt van die twee rechten een dubbelpunt. Zij $\mathcal{D}$ de verzameling van die dubbelpunten. Toon aan dat ieder drietal uit $\mathcal{D}$ een pooldriehoek bepaalt tegenover elke polariteit behorend bij een absoluut irreduciebele kegelsnede in $\mathcal{K}$.

(iv) Veronderstel dat q even is. Toon aan dat voor juist één van de drie punten P_1, P_2, P_3 de raaklijn in dit punt aan om het even welk absoluut irreduciebel exemplaar van $\mathcal{K}$ dezelfde is.

Oplossing 1. (i) Het is duidelijk dat de kegelsneden $C_{\alpha\lambda,\alpha\mu}$ en $C_{\lambda,\mu}$, $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$, aan elkaar gelijk zijn; het is immers steeds mogelijk de voorfactor α weg te delen. Er zijn dus hoogstens $\frac{q^2-1}{q-1} = q + 1$ verschillende kegelsneden in deze verzameling, namelijk $\{C_{1,\mu} \mid \mu \in \mathbb{F}_q\}$ en $C_{0,1}$. Om aan te tonen dat al deze kegelsneden verschillend zijn, bekijken we de doorsnede van $C_{\lambda,\mu}$ met de rechte $X_1 = 0$. Deze doorsnede is gelijk aan $\{(1, 0, 0), (\lambda, 0, \mu)\}$ en dus voor elk van deze $q + 1$ kegelsneden verschillend. Deze $q + 1$ kegelsneden zijn dus zelf ook verschillend.

Veronderstel nu eerst dat q even is. Dan is de kegelsnede $C_{\lambda,\mu}$ absoluut reduciebel als en slechts als (μ, μ, λ) op $C_{\lambda,\mu}$ ligt. Deze voorwaarde is voldaan als en slechts als

$$\lambda\lambda^2 + \lambda\mu^2 + \mu^2\lambda + \mu^2\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\lambda^2 + \mu^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\lambda + \mu)^2 = 0.$$

Er behoren dus twee absoluut reduciebele kegelsneden tot de verzameling in dit geval, namelijk $C_{0,1}$ die bestaat uit de rechten $X_2 = 0$ en $X_0 + X_1 = 0$, en $C_{1,1}$ die bestaat uit de rechten $X_0 + X_2 = 0$ en $X_1 + X_2 = 0$.

Veronderstel nu dat q oneven is. Dan is $C_{\lambda,\mu}$ absoluut reduciebel als en slechts als de matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ \lambda & 0 & \mu \\ \mu & \mu & 2\lambda \end{smallmatrix}\right)$ singulier is. Dat is het geval als en slechts als

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ \lambda & 0 & \mu \\ \mu & \mu & 2\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\lambda\mu^2 - 2\lambda^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\lambda+\mu)(\lambda-\mu) = 0.$$

Er behoren dus drie absoluut reduciebele kegelsneden tot de verzameling in dit geval, namelijk $C_{0,1}$ die bestaat uit de rechten $X_2 = 0$ en $X_0 + X_1 = 0$, $C_{1,1}$ die bestaat uit de rechten $X_0 + X_2 = 0$ en $X_1 + X_2 = 0$, en $C_{1,-1}$ die bestaat uit de rechten $X_0 - X_2 = 0$ en $X_1 - X_2 = 0$.

(ii) Veronderstel eerst dat q oneven is. Als een punt op iedere kegelsnede uit de verzameling $\mathcal{K}$ ligt, moet dit punt ook op de absoluut reduciebele exemplaren liggen. Door de rechten van $C_{0,1}$ en $C_{1,1}$ twee aan twee te snijden, vinden we er vier punten, namelijk $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(1,-1,-1)$ en $(1,-1,1)$. Dit zijn de enige vier punten die op elk van de kegelsneden uit $\mathcal{K}$ kunnen liggen. Men kan nu onmiddellijk nagaan dat deze vier punten ook effectief op elk van de kegelsneden uit $\mathcal{K}$ liggen.

Veronderstel nu dat q even is. We maken gebruik van een analoge redenering. Door de rechten van $C_{0,1}$ en $C_{1,1}$ twee aan twee te snijden, vinden we nu drie punten, namelijk $P_1(0,1,0)$, $P_2(1,0,0)$ en $P_3(1,1,1)$. Ook nu kunnen we direct nagaan dat deze drie punten op elk van de kegelsneden uit $\mathcal{K}$ liggen.

(iii) Uit (i) volgt onmiddellijk dat de dubbelpunten van $C_{0,1}$, $C_{1,1}$ en $C_{1,-1}$ respectievelijk $(1,-1,0)$, $(1,1,-1)$ en $(1,1,1)$ zijn. Dus is $\mathcal{D} = \{(1,-1,0),(1,1,-1),(1,1,1)\}$. Deze verzameling bevat dus slechts één drietal. We moeten dus nagaan dat $Q_1(1,-1,0)$, $Q_2(1,1,-1)$ en $Q_3(1,1,1)$ een pooldriehoek vormen tegenover de polariteit bepaald door

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \mu \\ 1 & 0 & \mu \\ \mu & \mu & 2 \end{pmatrix}$$

en het identieke automorfisme van $\mathbb{F}_q$, voor elke $\mu \neq \pm 1$. De poollijnen van Q_1, Q_2 en Q_3 worden respectievelijk gegeven door $X_1 - X_0 = 0$, $(1-\mu)X_0 + (1-\mu)X_1 + 2(\mu-1)X_2 = 0$ en $(1+\mu)X_0 + (1+\mu)X_1 + 2(1+\mu)X_2 = 0$. Het is duidelijk dat elk van deze poollijnen de andere twee dubbelpunten bevat.

(iv) De kern van de absoluut irreduciebele kegelsnede $C_{1,\mu}$, met $\mu \neq 1$, is het punt $(\mu,\mu,1)$. De raaklijn in P_1 aan $C_{1,\mu}$ wordt dan gegeven door $X_0 - \mu X_2 = 0$. De raaklijn in P_2 aan $C_{1,\mu}$ wordt gegeven door $X_1 - \mu X_2 = 0$ en de raaklijn in P_3 aan $C_{1,\mu}$ wordt gegeven door $X_0 - X_1 = 0$. Voor iedere absoluut irreduciebele kegelsnede uit $\mathcal{K}$ is de raaklijn in P_3 dus dezelfde. Voor P_1 en P_2 geldt dit duidelijk niet, tenzij $q = 2$.

Oefening 2. Beschouw in $\mathrm{PG}(4,q^2)$ de puntenverzameling Ω, bepaald door de vergelijking

$$X_0^{q+1} + X_3^{q+1} + X_4^{q+1} = 0.$$

(i) Tel het aantal punten van Ω. Hint: kijk naar de doorsnede van Ω met het vlak $X_1 = X_2 = 0$.

(ii) Wat is de maximale dimensie van de deelruimten op Ω?

(iii) De raakruimte in een punt P van een puntenverzameling is de unie van de rechten door P die in de puntenverzameling bevat zijn of met de puntenverzameling enkel P gemeen hebben. Zij $\beta \in \mathbb{F}_{q^2}$ zodanig dat $\beta^{q+1} = -1$. Het punt $Q(0,0,0,\beta,1)$ ligt dan in Ω. Je mag zonder bewijs aannemen dat de raakruimte in Q aan Ω een hypervlak is. Geef de vergelijking van dit raakhypervlak in Q aan Ω.

(iv) Hoeveel rechten die volledig in Ω bevat zijn, gaan er door het punt $Q'(0,0,1,0,0)$? Hoeveel rechten die volledig in Ω bevat zijn, gaan er door het punt Q?

Oplossing 2. (i) Zij π het vlak $\langle(1,0,0,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\rangle$ en zij ℓ de rechte $\langle(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0)\rangle$. Het is duidelijk dat $\pi \cap \ell = \emptyset$, dat $\ell \subset \Omega$ en dat $\pi \cap \Omega$ een hermitische kromme H in π is. Uit de vergelijking van Ω volgt onmiddellijk dat het punt (a,b,c,d,e), met $(a,d,e) \neq (0,0,0)$, op Ω ligt als en slechts als het punt $(a,0,0,d,e)$ op H ligt. Merk op dat de punten (a,b,c,d,e) waarvoor $(a,d,e) = (0,0,0)$, juist de punten op ℓ zijn. Dus geldt er dat

$$\Omega = \ell \cup \{(a,b,c,d,e) \mid (a,0,0,d,e) \in H \text{ en } b,c \in \mathbb{F}_{q^2}\}.$$

Hieruit volgt dan onmiddellijk dat

$$|\Omega| = (q^2+1) + q^4|H| = (q^2+1) + q^4(q^3+1) = q^7 + q^4 + q^2 + 1.$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van het feit dat een hermitische kromme q^3+1 punten bevat.

(ii) Zij R een punt van $H \subset \pi$. Uit (i) volgt dan dat alle punten van het vlak $\langle R,\ell\rangle$ op Ω liggen. Bijgevolg ligt het vlak $\langle R,\ell\rangle$ op Ω. Eigenlijk bestaat Ω uit q^3+1 vlakken door ℓ, elk corresponderend met een punt van H. Het is dus duidelijk dat Ω vlakken bevat.

We tonen nu aan dat Ω geen 3-ruimten bevat. Stel dat σ een 3-ruimte is die in Ω bevat is. Deze 3-ruimte (hypervlak) snijdt het vlak π in een rechte of in een vlak, wegens de identiteit van Grassmann. Zij m een rechte bevat in deze doorsnede. Dan geldt er dat $m \subset \sigma \cap \pi \subset \Omega \cap \pi = H$. Een hermitische kromme bevat echter geen rechten. Immers, door ieder punt van H gaat er één raaklijn, en gaan er q^2 rechten die $q+1$ punten van H bevatten. We vinden dus een strijdigheid. Ω bevat dus geen 3-ruimten. De maximale deelruimten zijn dus vlakken.

(iii) De raakruimte in Q aan Ω bevat zeker het vlak $\langle Q,\ell\rangle$ (dit kunnen we halen uit (ii)). Aangezien we mogen gebruiken dat de raakruimte in Q aan Ω een hypervlak is, volstaat het om één rechte door Q, niet in het vlak $\langle Q,\ell\rangle$, te vinden die in Q aan Ω raakt.

Het punt Q ligt op $H \subset \pi$. We merkten in (ii) al op dat er door Q één raaklijn aan H gaat. Deze raaklijn is de poollijn van Q tegenover de polariteit in π behorend bij H. We gebruiken in de volgende berekening de coördinaten X_0, X_3, X_4 voor π. De polariteit wordt dan gegeven door de eenheidsmatrix en het veldautomorfisme $\mathbb{F}_{q^2} \to \mathbb{F}_{q^2} : x \mapsto x^q$. De poollijn van Q wordt dan gegeven door $\beta^q X_3 + X_4 = 0$ in π. In $\mathrm{PG}(4,q)$ wordt deze rechte bepaald door $X_1 = X_2 = \beta^q X_3 + X_4 = 0$. Het punt Q is duidelijk bevat in deze rechte, net als het punt $R(1,0,0,0,0)$. Het raakhypervlak in Q aan Ω wordt dus opgepannen door ℓ, Q en R. Het enige hypervlak dat deze rechte en deze punten bevat, heeft als vergelijking $X_3 - \beta X_4 = 0$, wat hetzelfde is als $\beta^q X_3 + X_4 = 0$.

(iv) Het punt Q' ligt op de rechte ℓ. We merkten eerder op dat Ω bestaat uit q^3+1 verschillende vlakken door ℓ. Iedere rechte door Q' die volledig in Ω bevat is, ligt dus op één van die vlakken. In elk van die vlakken zijn er $q^2 + 1$ rechten die Q' bevatten; één van die rechten is steeds ℓ, maar alle andere zijn verschillend, aangezien de verschillende vlakken enkel ℓ gemeen hebben. Er zijn dus in totaal $q^2(q^3 + 1) + 1 = q^5 + q^2 + 1$ rechten door Q' in Ω bevat.

De $q^2 + 1$ rechten door Q in het vlak $\langle Q, \ell \rangle$ zijn sowieso bevat in Ω. We tonen nu aan dat er geen andere rechten door Q in Ω bevat zijn. Beschouw een rechte m door Q, maar niet in $\langle Q, \ell \rangle$. Dan is $\tau = \langle \ell, m \rangle$ een 3-ruimte aangezien $m \cap \ell = \emptyset$. De doorsnede $\tau \cap \pi$ moet dan een rechte m' zijn. Via de redenering uit (i) volgt dan dat dat $S' \in m'$ op H ligt als en slechts als $S = \langle S', \ell \rangle \cap m$ op Ω ligt (merk hierbij op dat $\langle S', \ell \rangle \cap m$ een punt is omdat $m \cap \ell = \emptyset$). Aangezien er op de hermitische kromme H geen rechten liggen (zie (ii)), kunnen niet alle punten van m' tot H behoren. Bijgevolg kunnen ook niet alle punten van m tot Ω behoren. We besluiten dat enkel de rechten door Q in het vlak $\langle Q, \ell \rangle$ bevat zijn in Ω. Zo zijn er $q^2 + 1$.