Academiejaar 2010-2011, 17 januari 2011, 08.30u

Redeneren, Abstraheren en Formuleren

- Schrijf je naam bovenaan elk antwoordblad. Schrijf niet met potlood of in het rood op je antwoordbladen.
- Los elke (deel)vraag afzonderlijk op. Vermeld duidelijk het nummer van de (deel)vraag bij elk antwoord. Indien je een (deel)vraag niet beantwoordt, vermeld dan ook duidelijk het nummer van deze (deel)vraag samen met de melding “geen antwoord”.
- Geef bij het leveren van bewijzen telkens expliciet aan welke bewijsmethoden je gebruikt.
- Geef enkel je antwoordbladen af. Kladpapier en opgave mag je houden.

---

1. Schrijf een geschikte pre- en postconditie voor een programmasegment dat de volgorde van de elementen in een array $b[0..n]$ omdraait (bv. [17,1,2011,8] wordt [8,2011,1,17]). Licht je antwoord kort toe.

2. Gegeven zijn de volgende twee predikaten, waarin x en y veranderlijken van een niet leeg type X zijn:

$$\begin{array}{rl} \text{(i)} & \exists x\,.\,(P(x) \wedge \forall y\,.\,(P(y) \Rightarrow y = x)) \\ \text{(ii)} & \exists x\,.\,\forall y\,.\,(P(y) \equiv y = x) \end{array}$$

   Zeg voor elk van onderstaande uitspraken of de uitspraak correct is of niet. Staaf je antwoord telkens met een bewijs of een tegenvoorbeeld. Vermeld gebruikte bewijsmethoden expliciet.

   (a) (i) is een nodige voorwaarde voor (ii)

   (b) (i) is een voldoende voorwaarde voor (ii)

3. (a) Schrijf Haskell-functies *mytake* en *mydrop* die allebei een natuurlijk getal n en een lijst xs als argumenten nemen. De waarde *mytake* n xs bestaat uit de eerste n elementen van xs, en *mydrop* n xs is wat er overblijft. Bv.

```
> mytake 3 "basta"
"bas"
> mydrop 3 "basta"
"ta"
> mytake 4 [17,1,2011]
[17,1,2011]
> mydrop 4 [17,1,2011]
[]
```

   In Haskell bestaan er functies *take* en *drop* met dezelfde functionaliteit, maar daar mag je *geen* gebruik van maken. Het is m.a.w. de bedoeling dat je zelf deze functionaliteit implementeert.

(b) Toon aan dat de concatenatie van *mytake n xs* en *mydrop n xs* de originele lijst oplevert, m.a.w. dat voor elk natuurlijk getal n en elke lijst xs geldt dat

$$(\mathit{mytake}\ n\ xs) \mathbin{+\!\!+} (\mathit{mydrop}\ n\ xs) = xs$$

Formuleer eerst nauwkeurig wat je moet bewijzen.

4. Beschouw het volgende programma S dat als input een positief geheel getal n neemt:

```
i := 0
a := 1
while a < n do
    a := 2 * a
    i := i + 1
```

(a) Bewijs dat $a = 2^i \wedge a/2 < n$ een invariant is voor de lus.

(b) Toon aan dat het programma de kleinste macht van 2 berekent die groter dan of gelijk is aan n, m.a.w. dat $\{n > 0\}\, S\, \{a = 2^i \wedge a/2 < n \wedge a \geq n\}$ een geldig Hoare-triplet is. Wees volledig.

5. (a) Toon aan dat als $\mathcal{F}$ een verzameling van deelverzamelingen van X is en $A \subseteq \mathcal{F}$ dat dan $A \subseteq \cup\mathcal{F}$. Vermeld gebruikte bewijsmethoden expliciet.

(b) Beschouw de volgende bewering:

> Zij $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ verzamelingen van deelverzamelingen van X. Als $\cup\mathcal{F}$ en $\cup\mathcal{G}$ disjunct zijn dan zijn $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ ook disjunct.

Een verstrooide docent heeft volgend "bewijs" neergeschreven voor deze bewering:

> Stel dat $\cup\mathcal{F}$ en $\cup\mathcal{G}$ disjunct zijn. Stel dat $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ niet disjunct zijn. Dan bestaat er een verzameling A zodat $A \in \mathcal{F}$ en $A \in \mathcal{G}$. Met behulp van de eigenschap uit vraag 5a volgt daar dan uit dat $A \subseteq \cup\mathcal{F}$ en $A \subseteq \cup\mathcal{G}$. Elk element van A behoort dus zowel tot $\cup\mathcal{F}$ en $\cup\mathcal{G}$, maar dit is onmogelijk vermits $\cup\mathcal{F}$ en $\cup\mathcal{G}$ disjunct zijn. We hebben m.a.w. een tegenstrijdigheid afgeleid, waaruit we besluiten dat $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ disjunct moeten zijn.

Leg kort uit wat er misloopt in dit bewijs, en *geef een tegenvoorbeeld* waaruit blijkt dat de bewering inderdaad fout is.