

# EXAMEN

## RELATIVITEITSTHEORIE

Academiejaar 2010-2011

21/01/2011

deel I: theorie

1. De Lorentztransformatie.

Leidt de Lorentztransformatie af (in bvb. de  $x$ -richting) uit de twee postulaten van de speciale relativiteit.

2. Gravitatiegolven.

In de zwakke-veld limiet leest de vacuüm Einstein-vergelijking:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\kappa \partial_\nu h^\kappa_\mu + \partial_\kappa \partial_\mu h^\kappa_\nu - \square h_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu h - \eta_{\mu\nu} \partial_\kappa \partial_\sigma h^{\kappa\sigma} + \eta_{\mu\nu} \square h) = 0$$

- Leidt de ijsymmetrie af voor deze tensorvergelijking.
- Bepaal, gegeven deze ijsymmetrie, de vlakke golf-oplossingen en onderscheid hierbij de fysische polarizaties.
- Bespreek het fysisch effect van een gravitatiegolf op een verzameling testdeeltjes.

3. Het principe van covariantie onder algemene coördinatentransformaties.

Geef dit principe in één of twee zinnen. Pas het vervolgens toe om de vacuüm Maxwell vergelijking ( $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ ) in een extern gravitatieveld op te schrijven. Schrijf hierbij alle Christoffelsymbolen expliciet.

4. Kort maar krachtig (antwoord telkens in één of twee zinnen).

- Leg uit vanuit de algemene relativiteit waarom Frank De Winne in het ISS nauwelijks de zwaartekracht voelt.
- De Robertson-Walker metriek voor een gesloten universum leest (met  $\kappa > 0$ ):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left( \frac{1}{1 - \kappa r^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right).$$

Deze metriek wordt duidelijk singulier voor  $r = 1/\sqrt{\kappa}$ . Is dit een fysische singulariteit of een coördinatensingulariteit?

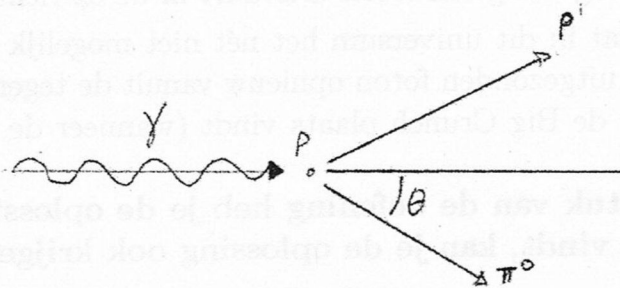
# Examen Relativiteitstheorie

## deel II: oefeningen

21 januari 2011

Het oefeningen examen is een open-boek examen, zonder oplossingen van oefeningen. Verder hebt u geen nood aan rekenmachines, gsm's of eender welke vorm van elektronica. Het examen telt twee vragen: vergeet de achterzijde niet.

1. Een foton  $\gamma$  valt in op een proton  $p$  in rust ten opzichte van het laboratoriumstelsel. Hierdoor wordt het proton verstrooid ( $p'$ ) en er wordt een  $\pi^0$ -meson (pion) gecreëerd in de interactie. Noem  $m_p$  en  $m_{\pi^0}$  de respectieve rustmassa's van het proton en het pion.



Figuur 1: De interactie ( $\gamma + p \rightarrow p' + \pi^0$ ) in het laboratorium stelsel.

- (a) Bepaal de minimale energie  $h\nu$  die het foton nodig heeft opdat de reactie kan plaatsvinden.
- (b) Bepaal de kinetische energie van het  $\pi^0$ -meson,  $T_{\pi^0}$ , in het laboratoriumstelsel in functie van de frequentie van het foton  $\nu$ , de hoek  $\theta$  (zie figuur 1) en de rustmassa's van het proton en pion. De oplossing van de kwadratische vergelijking volstaat en hoeft niet verder herleid te worden.



2. De Roberston-Walker metriek voor een gesloten universum kan geschreven worden als

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ d\eta^2 - \frac{1}{\kappa} (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) \right],$$

met  $\chi$  de veralgemeende radiale coördinaat (zie 10.13)

en  $\eta(t)$  een nieuwe (licht-)tijdscoördinaat. De coördinaten  $(\chi, \theta, \phi)$  zijn de hoekcoördinaten van een sfeer in vier dimensies en hun domein is  $\chi \in [0, \pi]$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  en  $\phi \in [0, 2\pi[$ .

- (a) Herschrijf de eerste Friedmann vergelijking voor een materie-gedomineerd universum met dichtheid  $\rho_{M_0}$  en kromming  $\kappa$ , in functie van de nieuwe tijdsparameter  $\eta$ , dus met schaalfactor  $a(\eta)$ .
- (b) Los deze vergelijking op, en bepaal dus  $a(\eta)$ .
- (c) Beschouw nu een stationaire waarnemer op positie  $(\chi, \theta, \phi) = (\pi/2, \pi/2, 0)$  die vlak na de Big Bang een foton uitstuurt in de  $\vec{e}_\phi$ -richting.

Toon aan dat in dit universum het **nét** niet mogelijk is voor diezelfde waarnemer om dit uitgezonden foton opnieuw vanuit de tegengestelde richting waar te nemen voor de Big Crunch plaats vindt (wanneer de schaalfactor opnieuw nul wordt).

**Voor dit stuk van de oefening heb je de oplossing  $a(\eta)$  nodig. Indien je die niet vindt, kan je de oplossing ook krijgen.**

Veel succes!