EXAMEN
RELATIVITEITSTHEORIE

Academiejaar 2010-2011

04/02/2011

deel I: theorie (twee pagina's!)

1. Het vrije Maxwellveld.
   - Leid de veldvergelijking af voor het vrije Maxwellveld.
   - Bespreek kort de ijksymmetrie.
   - Leg de Lorenzijk op, en bepaal vervolgens de massa en de fysische polarizaties van het veld.

   Gegeven, de actie:

   $$S = \int d^4x(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})\,. \qquad (1)$$

2. Periheliumprecessie Mercurius.

   Leidt de periheliumprecessie $\Delta\varphi$ na één omloop af voor een testdeeltje in een (benaderde) ellipsbaan met excentriciteit ϵ, in het gravitatieveld van een ster met massa M.

   Gegeven, de eerste integralen voor de angulaire- en radïele beweging:

   $$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\tilde{L}}{r^2} \qquad (2)$$

   $$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)\left(c^2 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) = \frac{\tilde{E}^2}{c^2}\,, \qquad (3)$$

   en de volgende nuttige vergelijkingen:

   $$\frac{d^2}{d\varphi^2}(\varphi\sin\varphi) + \varphi\sin\varphi = 2\cos\varphi\,, \qquad (4)$$

   $$\frac{d^2}{d\varphi^2}(\cos 2\varphi) + \cos 2\varphi = -3\cos 2\varphi\,. \qquad (5)$$

Einsteinvgl

3. Het covariant behoud van energie voor een alternatieve gravitatietheorie.

   In 1980 stelde Aleksei Starobinsky een modificatie van de Einsteinvergelijking voor, die leidt tot inflatie in het jonge universum. Expliciet schreef hij:

k is ook cte

$$G_{\mu\nu} + k_2 H_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}\,, \tag{6}$$

   met k_2 een constante en,

$$H_{\mu\nu} = 2RR_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^2 + 2(g_{\mu\nu}D_\rho D^\rho R - D_\mu D_\nu R)\,. \tag{7}$$

   Toon aan dat ook deze gewijzigde zwaartekrachtvergelijking consistent is met het covariant behoud van energie/impuls. Beschouw hierbij het covariant behoud voor de Einstein-tensor $G_{\mu\nu}$ als bewezen. Je zal ook gebruik kunnen maken van:

$$[D_\mu, D_\nu]V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}V^\sigma\,. \tag{8}$$

4. Kort maar krachtig (antwoord telkens in één of twee zinnen).

   - Vormt de volgende Lagrangiaan,

$$\mathcal{L} = iu^{*\dot{A}}\partial_{A\dot{A}}u^A\,, \tag{9}$$

     met u^A een spinorveld, een scalair onder de **volledige** Lorentzgroep? En wat met de Lagrangiaan:

$$\mathcal{L} = F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu}\,. \tag{10}$$

   - Stel, een bepaalde inertiaalwaarnemer (die dus waarneemt in een inertiaalstelsel) neemt een deeltje waar dat de natuurwetten tart door sneller te gaan dan het licht, met dus $v > c$. Meten alle andere inertiaalwaarnemers dan ook $v' > c$ voor dit deeltje, of zijn er ook inertiaalwaarnemers waarvoor $v' < c$. (Beschouw dit probleem voor het gemak op een vlakke Minkowski ruimte, in de context dus van speciale relativiteit.)

Examen Relativiteitstheorie
deel II: oefeningen

4 februari 2011

Het oefeningen examen is een open-boek examen, zonder oplossingen van oefeningen. Verder hebt u geen nood aan rekenmachines, gsm's of eender welke vorm van elektronica. Het examen telt twee vragen: vergeet de achterzijde niet.

1. **Speciale relativiteitstheorie**
De Schwarzschild metriek met Schwarzschildstraal R_S, zoals gekend uit de cursus,

$$ds_S^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{(1 - \frac{R_S}{r})} - r^2 d\Omega^2$$

kan in de omgeving van een punt nabij de horizon ($r \approx R_S$ en $d\Omega \ll 4\pi$) benaderd worden door

$$ds_{nh}^2 = \left(\frac{r - R_S}{R_S}\right) c^2 dt^2 - \frac{R_S dr^2}{(r - R_S)} - dy^2 - dz^2.$$

(a) Toon aan dat met behulp van een gepaste coördinatentransformatie de metriek ds_{nh}^2 herschreven kan worden als de Rindler metriek, gegeven door

OK

$$ds_R^2 = \rho^2 d\omega^2 - d\rho^2 - dy^2 - dz^2.$$

De nieuwe tijdachtige coördinaat ω wordt de hyperbolische hoek genoemd. De coördinaat ρ is nu per definitie de eigenafstand vanaf de horizon R_S tot de Schwarzschild afstand r.

(b) Gebruik de coördinatentransformatie

OK

$$\begin{cases} \cancel{ct = \rho \cosh \omega} \\ \cancel{x = \rho \sinh \omega} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \rho \cosh \omega \\ ct = \rho \sinh \omega \end{cases}$$

om aan te tonen dat de Rindler metriek ds_R^2 een deel van de vlakke Minkowski ruimte beschrijft. Schets de krommen voor constante ρ en de krommen voor constante ω in het Minkowski vlak (ct, x).

OK (c) Waar situeert op dezelfde tekening zich de oorspronkelijke event horizon $r = R_S$ van het zwarte gat? Teken de singulariteit $r = 0$ ook op jouw tekening - bedenk je dat de singulariteit een ruimteachtig oppervlak is.

(d) Toon aan dat in de Rindler metriek een stationaire waarnemer een constante grootte van de vierversnelling $A^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau}$ kent.

OK

2. **Algemene relativiteitstheorie**
Een deeltje en zijn antideeltje, beide met rustmassa m_0, cirkelen op eenzelfde afstand r_0 van een Schwarzschild zwart gat in tegengestelde richting. Ze botsen onvermijdelijk en annihileren tot twee fotonen. Wat is de totale radiatieve energie die waargenomen wordt door een stationaire waarnemer op de plaats van de botsing?

Veel succes!