Examen Analyse 1

UNIVERSITEIT GENT

1ste jaar bachelor in de Informatica

Oefeningen – 26 augustus 2011

Schrijf uw naam bovenaan elk antwoordenblad (geruit blad) waarop u iets geschreven hebt. Schrijf niet met potlood of in het rood of in een onleesbaar kleur (b.v. geel) op de antwoordenbladen. Vermeld duidelijk het nummer van de (deel)vraag bij elk antwoord. Indien u een (deel)vraag niet beantwoordt, vermeld dan ook duidelijk het nummer van deze (deel)vraag samen met de vermelding "geen antwoord". Geef bij elk antwoord telkens de nodige uitleg en berekeningen zodat duidelijk wordt wat uw redenering is.

1. Toon aan dat
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)}-x\right)=\frac{a+b+c}{3},$$
met $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

2. Gegeven de functie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ met waarde in x gegeven door
$$f(x)=\frac{\ln(\ln(x^2))}{2x^3-4x}.$$
   (i) Bepaal de maximale definitieverzameling van f.
   (ii) Ga na of f een even of oneven functie is.
   (iii) Bepaal alle nulpunten van f.
   (iv) Geef een volledig limietonderzoek van f ten opzichte van $(\bar{\mathbb{R}},d')$.
   (v) Bepaal alle asymptoten van f.

3. Los de volgende vergelijking op:
$$\left(\log_3(x)\right)^{-1}+\left(\log_{(x-1)(x+4)}(x)\right)^{-1}=1+\log_x(2x+13).$$

4. Bereken
$$\int_{16}^{+\infty}\frac{1}{2(\sqrt{x}-1)(x-6\sqrt{x}+9)}\,dx.$$

5. Gegeven de reeks
$$\sum\frac{2n}{(7n-3)^{\frac{4}{3}}}.$$
Is deze reeks absoluut convergent? Is deze reeks convergent? Verklaar uw antwoord.

UNIVERSITEIT GENT

Examen Analyse 1

1ste jaar bachelor in de Informatica

Theorie – 26 augustus 2011

Schrijf uw naam bovenaan elk antwoordblad (geruit blad) waarop u iets geschreven hebt. Schrijf niet met potlood of in het rood of in een onleesbaar kleur (b.v. geel). Vermeld duidelijk het nummer van de (deel)vraag bij elk antwoord. Indien u een (deel)vraag niet beantwoordt, vermeld dan ook duidelijk het nummer van deze (deel)vraag samen met de vermelding "geen antwoord". Geef bij elk antwoord telkens de nodige uitleg en berekeningen zodat duidelijk wordt wat uw redenering is.

1. Formuleer en bewijs de regel voor het bestaan van de limiet in een punt van een functie die toekomt in een cartesiaans product van 2 metrische ruimten en die afhankelijk is van een reële veranderlijke.

2. Formuleer en bewijs de rekenregel voor afleiding in een punt van het product van twee $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functies. $f(x) \circ g(x)$

3. Formuleer en bewijs de middelwaardestelling voor integralen.

4. De rekenregel voor afleiding in een punt van de inverse van een $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functie wordt op de achterkant van dit blad gegeven met bewijs.

   (i) Formuleer de stelling der tussenliggende waarden (zonder bewijs). Waarom kan in 1 in het gegeven bewijs de stelling der tussenliggende waarden gebruikt worden?

   (ii) Waarom is in (2) f^{-1} continu in b (formuleer de stelling waaruit dit volgt)? Waarom volgt uit de continuïteit van f^{-1} in b dat de limiet in het linkerlid van (2) gelijk is aan $f^{-1}(b)$?

   (iii) Waarom is in (3) $\lim\limits_{z \to a} \frac{1}{g(z)} = Df(a)$? Welke eigenschap wordt gebruikt om hieruit af te leiden dat $\lim\limits_{z \to f^{-1}(b)} g(z) = \frac{1}{Df(a)}$? Formuleer deze eigenschap.

   (iv) Formuleer de kettingregel voor limieten. Verifieer dat (1) inderdaad volgt uit (2) en (3).

   (v) Gebruik de rekenregel om de afleidbaarheid in een willekeurige $b \in]-1, 1[$ van arcsin te bewijzen uitgaande van de afleidbaarheid van sin. Leid ook een formule af voor $D\arcsin(b)$.

Eigenschap 1 *Stel f is een $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functie, $a \in \mathbb{R}$. Als*

- *f is strikt stijgend,*
- *f is continu,*
- *$\mathrm{def}(f)$ is een interval,*
- *f is afleidbaar in a,*
- *$Df(a) \neq 0$,*

dan is f^{-1} afleidbaar in b, met $b = f(a)$, en

$$Df^{-1}(b) = \frac{1}{Df(a)}.$$

Bewijs.

1. We tonen vooreerst aan dat b een inwendig punt is van $\mathrm{def}(f^{-1})$. Uit f is afleidbaar in a volgt het bestaan van $\eta > 0$ waarvoor $[a-\eta, a+\eta] \subseteq \mathrm{def}(f)$. Het strikt stijgend zijn van f impliceert $f(a) \in]f(a-\eta), f(a+\eta)[$, zodat m.b.v. de stelling der tussenliggende waarden (waaruit volgt dat $[f(a-\eta), f(a+\eta)] \subseteq \mathrm{wd}(f)$) geldt dat $f(a) \in \overset{\circ}{\widehat{\mathrm{wd}(f)}}$.

2. We tonen nu aan dat
$$\lim_{z \to b} \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(b)}{z - b} = \frac{1}{Df(a)}.$$
Aangezien $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{def}(f^{-1})}$ geldt, mogen we schrijven dat
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}, \quad \forall y \in \mathrm{def}(f^{-1}) \setminus \{b\}.$$
Het laatste aggregaat kan worden beschouwd als de functiewaarde in y van Φ, met $\Phi = g \circ f^{-1}$, waarbij gesteld is dat
$$g(x) = \frac{x - a}{f(x) - f(a)}, \quad \forall x \in \mathrm{def}(f) \setminus \{a\}.$$
Het gestelde komt dus neer op het aantonen van
$$\lim_{\substack{y \to b \\ y \in \mathrm{def}(f^{-1}) \setminus \{b\}}} \Phi(y) = \frac{1}{Df(a)}. \tag{1}$$
Deze limiet volgt gemakkelijk met de kettingregel voor limieten uit
$$\lim_{\substack{y \to b \\ y \in \mathrm{def}(f^{-1}) \setminus \{b\}}} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) \qquad \text{(aangezien } f^{-1} \text{ continu in } b \text{ is)}, \tag{2}$$
$$\lim_{z \to f^{-1}(b)} g(z) = \frac{1}{Df(a)} \qquad \left(\text{aangezien } \lim_{z \to a} \frac{1}{g(z)} = Df(a) \text{ en } Df(a) \neq 0\right). \tag{3}$$

$\square$