Academiejaar 2010-2011, 12 september 2011, 08.30u

Redeneren, Abstraheren en Formuleren

- Schrijf je naam bovenaan elk antwoordblad. Schrijf niet met potlood of in het rood op je antwoordbladen.
- Los elke (deel)vraag afzonderlijk op. Vermeld duidelijk het nummer van de (deel)vraag bij elk antwoord. Indien je een (deel)vraag niet beantwoordt, vermeld dan ook duidelijk het nummer van deze (deel)vraag samen met de melding “geen antwoord”.
- Geef bij het leveren van bewijzen uitleg bij alle stappen en vermeld expliciet welke bewijsmethoden je gebruikt.
- Geef enkel je antwoordbladen af. Kladpapier en opgave mag je houden.

---

1. Gegeven zijn de volgende specificaties:

   > De router kan enkel pakketjes sturen wanneer hij de nieuwe adresruimte ondersteunt. Opdat de router de nieuwe adresruimte zou ondersteunen moet de recentste versie van de software geïnstalleerd zijn. De router kan pakketjes sturen indien de recentste versie van de software geïnstalleerd is.

   (a) Ontleed de logische structuur van bovenstaande specificaties door de uitdrukkingen om te zetten in proposities. Noteer duidelijk met welke deeluitspraken de veranderlijken die je daarbij introduceert overeenkomen, en zorg ervoor dat de proposities de bedoelde betekenis van de specificaties weergeven (niet meer en niet minder). Denk hierbij goed na over wat nodige en voldoende voorwaarden zijn.

   (b) Volgt uit bovenstaande specificaties dat de router de nieuwe adresruimte ondersteunt a.s.a. de recentste versie van de software geïnstalleerd is? Bewijs dat je antwoord correct is.

2. Zijn onderstaande beweringen goed of fout? Staaf je antwoord telkens met een bewijs of een tegenvoorbeeld. Je mag ervan uitgaan dat x van een niet leeg type X is.

   (a) $(\exists x\,.\,P(x)) \wedge (\forall x\,.\,P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x\,.\,Q(x))$

   (b) $(\exists x\,.\,P(x)) \wedge (\forall x\,.\,P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftarrow (\exists x\,.\,Q(x))$

3. Gegeven is de volgende Haskell-functie

   ```
   (0) fun :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
   (1) fun p [] = []
   (2) fun p (x:xs) = if (p x) then (x : fun p xs) else (fun p xs)
   ```

   (a) Wat doet de functie `fun`? Leg dit kort uit in algemene termen, en illustreer vervolgens met een concreet voorbeeld.

(b) Toon aan dat voor alle lijsten xs en ys van een type a en elke booleaanse functie p van het corresponderende type $a \to Bool$ geldt

$$fun\ p\ (xs +\!\!+\ ys) = (fun\ p\ xs) +\!\!+\ (fun\ p\ ys)$$

4. Het volgende programmafragment komt uit het lichaam van een lus die het aantal strikt positieve elementen in een array $A[0..m-1]$ telt.

```
if A[i] > 0 then
    i := i + 1
    r := r + 1
else
    i := i + 1
```

Vóór de uitvoering van dit fragment verwachten we dat $i < m$ en dat r gelijk is aan het aantal strikt positieve elementen in $A[0..i-1]$; na de uitvoering van dit fragment verwachten we dat $i \leq m$ en dat r nog steeds gelijk is aan het aantal strikt positieve elementen in $A[0..i-1]$ (maar i heeft op dat moment uiteraard een aangepaste waarde). Toon aan dat het programmafragment aan onze verwachtingen voldoet. Doe dit in twee stappen:

(a) Schrijf neer wat je moet bewijzen. Zet daarbij de hierboven geformuleerde verwachtingen om naar predikaten die kunnen optreden als pre- en postcondities van een Hoare-triplet.

(b) Toon aan dat de te bewijzen beweringen uit deelvraag (a) inderdaad voldaan zijn.

5. Een verstrooide docent heeft onderstaand "bewijs" door inductie neergeschreven waaruit zou moeten blijken dat $a^n = 1$ voor alle natuurlijke getallen n, waarbij a een reëel getal groter dan 0 is:

> $a^0 = 1$ is waar wegens de definitie van a^0 (inductiebasis). Stel dat $a^j = 1$ geldt voor alle natuurlijke getallen j met $j \leq k$ (inductiehypothese). Dan geldt ook
>
> $$a^{k+1} = \frac{a^k \cdot a^k}{a^{k-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$
>
> Hieruit volgt het gestelde.

Waarom is dit bewijs verkeerd? Geef in je antwoord duidelijk aan wat er misloopt in het bewijs, en op welke plaats.