Oplossingen examen Discrete Wiskunde

tweede zittijd 2010-2011

09 september 2011

Oefening 1. Op een 5×7 elektrisch schakelbord worden chips gemplementeerd, telkens op horizontale en verticale afstand van 1 mm. Je krijgt nu 10 identieke brugjes (van 1 mm lang) om een verbinding te maken van de chip linksboven naar de chip rechtsonder. Hoeveel verschillende paden kun je zo maken?

Oplossing. Je moet in totaal 6 keer naar rechts gaan en 4 keer naar onder, de vraag is hier dus alleen in welke volgorde. Ieder pad stemt overeen met een unieke permutatie van 6 keer *naar rechts* en 4 keer *omlaag*. Het totale aantal is dus $\binom{10}{4} = 210$. $\square$

Oefening 2. Zijn volgende beweringen waar of vals? Bewijs of geef een (tegen)voorbeeld.

(a) Er bestaat een bijectie van de verzameling van even natuurlijke getallen op de verzameling van alle natuurlijke getallen.

(b) Er bestaat een binaire 6×4 matrix met precies 6 enen (en dus 18 nullen), zodat elke rij en elke kolom een even aantal eentjes heeft.

(c) Er bestaan natuurlijke getallen a, b, c, met $a < b < c$, zodat $2^a + 2^b = 2^c$.

(d) De vergelijking $444x^{666} \equiv 222 \pmod{2^{888}}$ heeft meerdere oplossingen $x \in \mathbb{N}$.

(e) Zij a, b, c, n natuurlijke getallen. Als $ab|n$, $ac|n$ en $\text{ggd}(a, b) = \text{ggd}(b, c) = 1$, dan geldt noodzakelijk $abc|n$.

(f) De verzameling van alle priemgetallen is aftelbaar.

(g) De relatie "komt evenveel voor op dit examen" is een equivalentierelatie op de letters van het alfabet.

Oplossing. (a) Waar. Aangezien elk even getal n te schrijven is als $n = 2k$, kunnen we een afbeelding definiëren $f : 2\mathbb{N} \to \mathbb{N} : 2k \mapsto k$. Deze is goed gedefinieerd (wegens voorgaande), injectief (want uit $k = k'$ volgt $2k = 2k'$) en surjectief (want elk natuurlijk getal k is te schrijven als $f(2k)$).

(b) Waar. Een voorbeeld van zo'n matrix is

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}.$$

(c) Vals. Onderstel uit het ongerijmde dat er dergelijke natuurlijke getallen a, b, c zouden bestaan. Daar $a < b$ is $2^a < 2^b$ en daar $b < c$ is $b + 1 \leq c$, zodat

$$2^a + 2^b < 2^b + 2^b = 2^{b+1} \leq 2^c.$$

Er geldt dus altijd dat $2^a + 2^b < 2^c$, gelijkheid kan niet optreden.

(d) Vals. Als de vergelijking geldt modulo 2^{888}, dan moet ze ook gelden modulo 4 (want $4 = 2^2 | 2^{888}$). Modulo 4 staat daar echter $0 \equiv 2 \pmod 4$. Die vergelijking heeft dus geen oplossingen $x \in \mathbb{N}$.

(e) Waar. Aangezien $ab|n$, moet ook $b|n$. Aangezien $\mathrm{ggd}(a, b) = \mathrm{ggd}(b, c) = 1$, moet ook $\mathrm{ggd}(ac, b) = 1$. We hebben dus $b|n$, $ac|n$ en $\mathrm{ggd}(ac, b) = 1$, waaruit we mogen besluiten dat $b \cdot ac|n$.

(f) Waar. Elke deelverzameling van de natuurlijke getallen is aftelbaar. Je kunt ze bijvoorbeeld expliciet aftellen door ze gewoon in stijgende volgorde na elkaar te zetten: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$

(g) Waar. Noteer $\mathcal{A} = \{a, b, \ldots, z\}$ het alfabet en noteer voor elke letter $\eta \in \mathcal{A}$ met $\#(\eta)$ het aantal keer dat die letter voorkomt op het examen. De gegeven relatie is:

- reflexief: elke letter komt even vaak voor als zichzelf: $\#(\eta) = \#(\eta)$ voor elke $\eta \in \mathcal{A}$;
- symmetrisch: voor elke twee letters $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{A}$ geldt dat als $\#(\eta_1) = \#(\eta_2)$, dan ook $\#(\eta_2) = \#(\eta_1)$;
- transitief: voor elke drie letters $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \mathcal{A}$ geldt dat als $\#(\eta_1) = \#(\eta_2)$ en $\#(\eta_2) = \#(\eta_3)$, dan ook $\#(\eta_1) = \#(\eta_3)$.

$\square$

Oefening 3. Op twee kubussen worden strikt[1] positieve natuurlijke getallen geschreven, één op elk zijvlak van elke kubus (niet noodzakelijk allemaal verschillend). Vervolgens worden zij als dobbelstenen geworpen. De genererende functie van de som van de geworpen getallen is

$$x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12},$$

waarbij de 36 termen zoals gebruikelijk staan voor elk van de 36 mogelijke koppels vlakken, en de macht van x voor de som van de getallen op die twee vlakken.

Eén mogelijkheid om deze situatie te bekomen is natuurlijk om de getallen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ op de zijvlakken van de ene dobbelsteen te schrijven, en eveneens $1, 2, 3, 4, 5, 6$ op de zijvlakken van de andere. Er is echter nog een andere mogelijkheid. Vind deze.

Oplossing. De genererende functie van een klassieke dobbelsteen is $F = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$, de centrale formule is dus gelijk aan F^2. Gevraagd wordt dus om a, b, c, d, e, f en g, h, i, j, k, l te vinden, zodat

$$\begin{aligned} &(x^a + x^b + x^c + x^d + x^e + x^f)(x^g + x^h + x^i + x^j + x^k + x^l) \\ = {}& x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12} = F^2. \end{aligned}$$

We zullen dus het rechterlid factoriseren, en kijken op welke manieren deze samen te stellen is tot het linkerlid. $F = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$ valt op het zicht gemakkelijk te factoriseren als zowel $x(1+x)(1+x^2+x^4)$ als $x(1+x+x^2)(1+x^3)$. Dit geeft ons onmiddellijk de volledige factorisatie: $F = x(1 + x)(1 + x + x^2)(1 - x + x^2)$. Hoe kunnen we dus de factoren van $x^2(1+x)^2(1+x+x^2)^2(1-x+x^2)^2$ in twee stukken $A(x)$ en $B(x)$ groeperen, met de extra voorwaarden dat:

- elke factor 6 termen heeft (want elke dobbelsteen heeft 6 zijvlakken), dus m.a.w. $A(1) = B(1) = 6$;
- alle termen hebben een macht groter dan 0 (want 0 mag niet volgens de opgave).

Opdat de term x^0 niet zou voorkomen, moeten beide termen een factor x hebben. Opdat $A(1) = B(1) = 6$, moet $1+x$ en $1+x+x^2$ in beide termen exact 1 keer voorkomen. De enige speling die we hebben, is dus of we de termen $(1 - x + x^2)^2$ samen houden of opsplitsen. Als we ze ook splitsen, dan krijgen we

$$A(x) = B(x) = x(1 + x)(1 + x + x^2)(1 - x + x^2) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6,$$

de gewone dobbelstenen. Als we ze allebei in dezelfde factor steken, bijvoorbeeld in A, dan krijgen we

$$\begin{aligned} A(x) &= x(1 + x)(1 + x + x^2)(1 - x + x^2)^2 = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8, \\ B(x) &= x(1 + x)(1 + x + x^2) = x + x^2 + x^2 + x^3 + x^3 + x^4. \end{aligned}$$

Dus op de ene dobbelsteen schrijven we $1, 3, 4, 5, 6, 8$ en op de andere dobbelsteen schrijven we $1, 2, 2, 3, 3, 4$. □

[1] Het getal 0 is niet strikt positief, met andere woorden: op de ene kubus $0, 1, 2, 3, 4, 5$ schrijven en op de andere $2, 3, 4, 5, 6, 7$ schrijven, is niet toegestaan.

Volgende som-formules kunnen misschien handig zijn. We beweren niet dat je ze nodig hebt en al zeker niet dat je ze allemaal nodig hebt, maar mocht je ze willen gebruiken dan mag je onderstaande stellingen zonder bewijs aannemen.

Zij $k, n \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq 1$. Dan geldt

$$\sum_{i=k}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - a^k}{a - 1}.$$

Zij $k \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$ met $0 \leq a < 1$. Dan geldt

$$\sum_{i=k}^{+\infty} a^i = \frac{a^k}{1 - a}.$$

Zij $k \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$ met $0 \leq a < 1$. Dan geldt

$$\sum_{i=k}^{+\infty} \binom{i}{k} a^i = \frac{a^k}{(1 - a)^{k+1}}.$$

Zij $n \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq 1$. Dan geldt

$$\sum_{i=1}^{n} i a^{i-1} = \frac{n a^{n+1} - (n+1) a^n + 1}{(1 - a)^2}.$$

Zij $n \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$ met $0 \leq a < 1$. Dan geldt

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i a^{i-1} = \frac{1}{(1 - a)^2}.$$

Zij $n \in \mathbb{N}$ en $p \in \mathbb{R}$, dan geldt

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i} = 1.$$

Zij $n \in \mathbb{N}$, dan geldt

$$\sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Zij $n \in \mathbb{N}$, dan geldt

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 \binom{n}{i} = (n(n-1)2^{n-2}) + (n \cdot 2^{n-1}).$$