Examen Analyse III oefeningen

1. Bereken
$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{n^3\sin(x/n)}{1+n^2x^3}\,dx\,.$$

2. Verklaar of weerleg de aangeduide stappen in de volgende redenering:

   Lemma. Zij g: $X\to\mathbb{R}$ integreerbaar. Dan bestaat voor elke $\varepsilon>0$ een $\delta>0$ zo dat voor elke meetbare $E\subseteq X$ met $\mu(E)<\delta$ geldt dat $\int_E|g|<\varepsilon$.

   Bewijs. Definieer voor elke $n\in\mathbb{N}$
$$g_n(x):=\begin{cases} g(x), & \text{als } |g(x)|\le n\\ 0, & \text{als } |g(x)|>n.\end{cases}$$
   Dan is $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van meetbare`[1]` afbeeldingen die puntsgewijs convergeert naar g. Zij $\varepsilon>0$. Wegens gedomineerde convergentie bestaat dus $n_0\in\mathbb{N}$ waarvoor $\int_X|g-g_{n_0}|<\varepsilon/2$`[2]`. Kies $\delta<\varepsilon/(2n_0)$. Zij $E\subseteq X$ meetbaar met $\mu(E)<\delta$. Dan is
$$\int_E|g|\le\int_E|g-g_{n_0}|+\int_E|g_{n_0}|\overset{[3]}{<}\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\qquad\square$$

   Stelling. (*Gedomineerde convergentie veralgemeend*). Zij $(X,\mathcal{A},\mu)$ een maatruimte met $\mu(X)<+\infty$. Zij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van meetbare afbeeldingen $X\to\mathbb{R}$ die in maat convergeert naar een meetbare afbeelding f. Als er een integreerbare g bestaat zo dat $|f_n(x)|\le g(x)$ voor alle $x\in X$ en $n\in\mathbb{N}$, dan is f integreerbaar en $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n=\int_X f$.

   Proof. Wegens de gegevens kunnen we een deelrij $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ vinden die b.o. convergeert naar f`[4]`. Bijgevolg is $|f(x)|\le|g(x)|$ b.o.`[5]`, zodat ook f integreerbaar is`[6]`. Zij $\varepsilon>0$. Wegens het vorige lemma bestaat $\delta>0$ zo dat voor elke meetbare $E\subseteq X$ met $\mu(E)<\delta$ geldt dat $\int_E g<\varepsilon/4$. Kies nu $\sigma>0$ zo dat $\sigma\cdot\mu(X)<\varepsilon/2$. Vermits $f_n\to f$ in maat vinden we $N\in\mathbb{N}$ waarvoor $\mu(\{|f-f_n|\ge\sigma\})<\delta$ voor alle $n>N$. Dan is voor elke $n>N$
$$\left|\int_X(f-f_n)\right|\overset{[7]}{\le}\int_{\{|f-f_n|<\sigma\}}|f-f_n|+\int_{\{|f-f_n|\ge\sigma\}}|f-f_n|\overset{[8]}{\le}\sigma\mu(X)+2\int_{\{|f-f_n|\ge\sigma\}}g<\varepsilon.\qquad\square$$

3. Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van positieve reële getallen. Toon aan dat $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$ een maatruimte is, als
$$\mu(A):=\begin{cases}0, & \text{als } A=\emptyset\\ \displaystyle\sum_{n\in A}a_n, & \text{als } A\subseteq\mathbb{N},\ A\neq\emptyset.\end{cases}$$

4. Zij $X=\mathbb{R}$ met de Lebesgue-maat. Geef een voorbeeld van een rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van continue afbeeldingen $X\to\mathbb{R}$ waarvoor $f_n\rightrightarrows 0$ op heel $\mathbb{R}$, maar $f_n\not\to 0$ in L_1-norm.

5. Zij $(X,\mathcal{A},\mu)$ een maatruimte. Definieer $\overline{\mu}(A):=\inf\{\mu(E):A\subseteq E,E\in\mathcal{A}\}$ voor elke $A\subseteq X$. Toon dan aan:

   (a) $\overline{\mu}$ is een uitwendige maat.

   (b) $\overline{\mu}(A)=\mu(A)$ voor elke $A\in\mathcal{A}$.

   (c) elke $A\in\mathcal{A}$ is $\overline{\mu}$-meetbaar.
   Hint: gebruik delen (a) en (b).

Examen Analyse III

1. Toon aan:

   Eigenschap 1. *Zij $I \subseteq \mathbb{R}^d$ een rechthoek en $A \subseteq I$. Als A een volume heeft, dan is A Lebesgue-meetbaar met $\mu(A) = v(A)$.*

2. Toon aan:

   Eigenschap 2.

   (a) Een afbeelding $f\colon X \to [0, +\infty]$ is meetbaar als en slechts als f de puntsgewijze limiet is van een stijgende rij van niet-negatieve simpele afbeeldingen.

   (b) Een afbeelding $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ is meetbaar als en slechts als f de puntsgewijze limiet is van een rij van simpele afbeeldingen.

   (c) Als f, g meetbare afbeeldingen $X \to \overline{\mathbb{R}}$ zijn en $f(x) + g(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ bestaat voor elke $x \in X$, dan is ook $f + g$ meetbaar.

3. Beantwoord de vragen:

Eigenschap 3. *Zij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van meetbare afbeeldingen $X \to \mathbb{R}$ en zij $f\colon X \to \mathbb{R}$ meetbaar. Dan geldt:*

(a) $f_n \to f$ in maat `[1]` *als en slechts als*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\exists E \in \mathcal{A} \text{ met } \mu(E^c) \leq \varepsilon)\big(\sup_E |f_n - f| \leq \varepsilon\big).$$

(b) Als $f_n \to f$ bijna gelijkmatig, dan is ook $f_n \to f$ in maat.

(c) Als $f_n \to f$ in maat, dan convergeert een deelrij van $(f_n)_n$ bijna gelijkmatig naar f.

Bewijs. a. $\Rightarrow$: zij $\varepsilon > 0$. Dan bestaat $N \in \mathbb{N}$ zo dat $\mu\{|f - f_n| \geq \varepsilon\} \leq \varepsilon$ voor elke $n \geq N$. Stel $E := \{|f - f_n| < \varepsilon\}$.
$\Leftarrow$: zij $r > 0$ en $\varepsilon > 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ en kies voor elke $n \geq N$ een $E_n \in \mathcal{A}$ met $\mu(E_n^c) \leq \varepsilon$ en $\sup_{E_n} |f_n - f| < r$. Dan is $\mu\{|f - f_n| \geq r\}[2] \leq \mu(E_n^c) \leq \varepsilon$. Omdat ε willekeurig is, is dus $\mu\{|f - f_n| \geq r\} \to 0$.
b. De eigenschap in deel (a) verschilt enkel van de karakterisering van bijna gelijkmatige convergentie `[3]` in het feit dat E hier afhangt van n.
c. We vinden achtereenvolgens
$n_1 \in \mathbb{N}$ en $E_1 \in \mathcal{A}$ met $\mu(E_1^c) \leq 1/2$ en $\sup_{E_1} |f_{n_1} - f| \leq 1/2$
$n_2 > n_1$ en $E_2 \in \mathcal{A}$ met $\mu(E_2^c) \leq 1/2^2$ en $\sup_{E_2} |f_{n_2} - f| \leq 1/2^2$
...
$n_m > n_{m-1}$ en $E_m \in \mathcal{A}$ met $\mu(E_m^c) \leq 1/2^m$ en $\sup_{E_m} |f_{n_m} - f| \leq 1/2^m$
...
Zij nu $\varepsilon > 0$. Kies $M \in \mathbb{N}$ zo dat $1/2^M \leq \varepsilon$. Stel $E := \bigcap_{m>M} E_m$. Dan is

$$\mu(E^c) = \mu\Big(\bigcup_{m>M} E_m^c\Big) \overset{[4]}{\leq} \sum_{m>M} \mu(E_m^c) \leq \sum_{m>M} 1/2^m = 1/2^M \leq \varepsilon$$

en voor elke $m > M$ is $\sup_E |f_{n_m} - f| \leq 1/2^m$. Bijgevolg convergeert $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ bijna gelijkmatig naar f `[5]`. $\square$

`[1]` Geef de definitie van convergentie in maat.
`[2]` Waarom behoort $\{|f - f_n| \geq r\}$ tot het domein van μ?
`[3]` Geef de definitie van bijna gelijkmatige convergentie en formuleer de karakterisering waarnaar verwezen wordt.
`[4-5]` Verklaar.

4. Beantwoord de vragen:

Lemma 4. *Zij ν, μ eindige maten op een σ-algebra $\mathcal{A}$. Zij $r \in \mathbb{R}$. Dan zijn equivalent voor $A \in \mathcal{A}$:*

(a) $\begin{cases} \nu(E) \leq r\mu(E), & \forall E \subseteq A, E \in \mathcal{A} \\ \nu(E) \geq r\mu(E), & \forall E \subseteq A^c, E \in \mathcal{A}. \end{cases}$

(b) $\nu(A) - r\mu(A) \leq \nu(E) - r\mu(E), \quad \forall E \in \mathcal{A}.$

Eigenschap 5. *Zij ν, μ eindige maten op een σ-algebra $\mathcal{A}$. Zij $r \in \mathbb{R}$ met $r \geq 0$. Dan bestaat $A_r \in \mathcal{A}$ die aan de eigenschappen van lemma 4 voldoet.*

Stelling 6. *Zij ν, μ eindige maten op een σ-algebra $\mathcal{A}$ met μ volledig en met $\nu \ll \mu$. Dan bestaat een μ-integreerbare afbeelding $f\colon X \to [0, +\infty[$ zo dat $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$ voor elke $E \in \mathcal{A}$. Elke twee afbeeldingen met deze eigenschap zijn μ-b.o. en ν-b.o. gelijk.*

Bewijs. (1) Kies voor elke $r \in \mathbb{Q}$ met $r \geq 0$ een verzameling A_r zoals in eigenschap 5. We kunnen $A_0 = \varnothing$ kiezen.
(2) We tonen aan dat $\mu(A_r \setminus A_q) = 0$ als $r < q$. [...]
(3) We mogen zelfs aannemen dat de familie $(A_q)_{q\in\mathbb{Q},q\geq 0}$ stijgend is. [...].
(4) We definiëren voor elke $n \in \mathbb{N}$ als volgt een benadering s_n van f:
$s_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{A_{\frac{k}{2^n}} \setminus A_{\frac{k-1}{2^n}}}$.
(5) We tonen aan dat de rij $(s_n)_n$ stijgend is. [...]
(6) Bijgevolg bestaat $f(x) := \lim_{n\to\infty} s_n(x) \in [0, +\infty]$ voor elke $x \in X$. Uit de eigenschappen van meetbare afbeeldingen volgt dat f meetbaar is`[1]`. Door de monotone convergentie-stelling is ook $\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E s_n\, d\mu$ voor elke $E \in \mathcal{A}$.
(7) We tonen aan dat $\int_E f\, d\mu = \nu(E)$ voor elke $E \in \mathcal{A}$ (daaruit volgt dan ook dat $\int_X f\, d\mu = \nu(X) < +\infty$, zodat f μ-integreerbaar is). Gebruik makend van lemma 4(1) vinden we voor $E \in \mathcal{A}$ [...] $\nu(E \cap A_n) - \frac{\mu(X)}{2^n} \leq \int_E s_n\, d\mu \leq \nu(E \cap A_n)$.
Het volstaat dus aan te tonen dat $\lim_{n\to\infty} \nu(E \cap A_n) = \nu(E)$. Vermits $(A_n)_n$ stijgend is, is dit equivalent met $\nu\big(E \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \nu(E)$, of nog, met $\nu(E \setminus \bigcup_n A_n) = 0$. Omdat $\nu \ll \mu$ volstaat het aan te tonen dat $\mu(E \setminus \bigcup_n A_n) = 0$, of nog (omdat ... `[2]`) dat $\mu(X \setminus \bigcup_n A_n) = 0$. Wegens lemma 4 is nu $\nu(X) \geq \nu(X \setminus \bigcup_n A_n) \geq n\mu(X \setminus \bigcup_n A_n)$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Omdat $\nu(X) < +\infty$ volgt hieruit dat $\mu(X \setminus \bigcup_n A_n) = 0$`[3]`.
(8) [...]
(9) Veronderstel nu dat ook $g\colon X \to [0, +\infty[$ μ-integreerbaar is met $\nu(E) = \int_E g\, d\mu$ voor elke $E \in \mathcal{A}$. Dan is $\int_E (f - g)\, d\mu = \nu(E) - \nu(E) = 0$ voor elke $E \in \mathcal{A}$, zodat $f = g$ μ-b.o. wegens de annihilatie-eigenschap. Omdat $\nu \ll \mu$, is ook $f = g$ ν-b.o`[4]`. □

Stelling 7. *Zij ν, μ σ-eindige maten op een σ-algebra $\mathcal{A}$ met μ volledig en met $\nu \ll \mu$. Dan bestaat een meetbare afbeelding $f\colon X \to [0, +\infty[$ zo dat $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$ voor elke $E \in \mathcal{A}$. Elke twee afbeeldingen met deze eigenschap zijn μ-b.o. en ν-b.o. gelijk.*

Bewijs. Door het gegeven is $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ met $(Y_n)_n$, $(Z_n)_n$ stijgend, en $\mu(Y_n) < +\infty$ en $\nu(Z_n) < +\infty$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Dan is $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \cap Z_n$ met $\mu(Y_n \cap Z_n) < +\infty$ en $\nu(Y_n \cap Z_n) < +\infty$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Dan vinden we ook X_n met $X = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\mu(X_n) < +\infty$ en $\nu(X_n) < +\infty$. Als deelruimte zijn ν, μ eindige maten op de deelruimten X_n met μ volledig en $\nu \ll \mu$ op X_n`[5]`. Door de voorgaande stelling bestaan dus meetbare afbeeldingen $f_n\colon X_n \to [0, +\infty[$ met $\nu(E) = \int_E f_n\, d\mu$ voor elke $E \in \mathcal{A}$, $E \subseteq X_n$. Definieer dan $f(x) := f_n(x)$, voor elke $x \in X_n$. M.a.w., $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n 1_{X_n}$. Elke $f_n 1_{X_n} : X \to [0, +\infty[$ is meetbaar, zodat ook f meetbaar is`[6]`. Door monotone convergentie is voor elke $E \in \mathcal{A}$

$$\int_E f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f 1_{X_n}\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E\cap X_n} f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E \cap X_n) = \nu(E).$$

Zij nu ook $g\colon X \to [0, +\infty[$ μ-meetbaar met $\nu(E) = \int_E g\, d\mu$ voor elke $E \in \mathcal{A}$. Door de voorgaande stelling is dan $f_{|X_n} = g_{|X_n}$ μ-b.o. en ν-b.o. voor elke $n \in \mathbb{N}$, zodat ook $f = g$ μ-b.o. en ν-b.o `[7]`. □

`[1, 3-4, 6-7]` Verklaar.
`[2]` Vul in.
`[5]` Geef de definitie van 'ν is absoluut continu t.o.v. μ' en verklaar.

Examen Analyse III

1. Toon aan:

   Eigenschap 1. *Zij $I \subseteq \mathbb{R}^d$ een rechthoek en $A \subseteq I$. Dan is $\overline{v}(A) + \underline{v}(I \setminus A) = v(I)$. Verder heeft A een volume als en slechts als $\overline{v}(A) + \overline{v}(I \setminus A) = v(I)$.*

2. Toon aan:

   Eigenschap 2. *Zij $\mu(X) < +\infty$. Zij $(f_n)_n$ een rij van integreerbare afbeeldingen $X \to \mathbb{R}$. Als $R \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat $|f_n| \leq R$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, en $f_n \to f$ (puntsgewijs), dan is ook f integreerbaar en $f_n \xrightarrow{L_1} f$. I.h.b. is $\lim_n \int_X f_n = \int_X \lim_n f_n$.*

   Stelling 3. *Zij $(f_n)_n$ een rij van meetbare afbeeldingen $X \to \overline{\mathbb{R}}$. Als een integreerbare g: $X \to \overline{\mathbb{R}}$ bestaat zo dat $|f_n| \leq g$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, en $f_n \to f$ (puntsgewijs), dan is f integreerbaar en $f_n \xrightarrow{L_1} f$. I.h.b. is $\lim_n \int_X f_n = \int_X \lim_n f_n$.*

   Je mag hierbij de stelling van Egorov gebruiken zonder bewijs.

3. Beantwoord de vragen:

Lemma 4. *Zij $P \subseteq \mathbb{R}^2$ een parallellogram opgespannen door p_1, p_2 en zij $r > 0$. Als $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : (\exists y \in P)(\|x - y\| \leq r)\}$, dan is $\overline{\mu}(A) \leq \mu(P) + 4r(\|p_1\| + \|p_2\| + 4r)$.* `[1]`

Een **bijna-vierkant** is een rechthoek $I = I_1 \times I_2$ met $v(I_i) \leq 2\, v(I_j)$ $(i, j = 1, 2)$.

Lemma 5. *Zij $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ open en zij φ een $\mathcal{C}^1$-afbeelding $\Omega \to \mathbb{R}^2$. Zij $\varepsilon > 0$ en $a \in \Omega$. Dan bestaat $\delta > 0$ zo dat voor elk bijna-vierkant $I \subseteq B(a, \delta)$*

$$\overline{\mu}(\varphi(I)) \leq \int_I \big(|\det D\varphi| + \varepsilon \big).$$

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$. Door ... `[2]` van $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ en van de afbeelding $x \mapsto |\det D\varphi(x)|$ in het punt a (voor $i, j = 1, 2$) bestaat een $\delta > 0$ met de eigenschap dat $\overline{B}(a, \delta) \subseteq \Omega$ en dat voor alle $x \in B(a, \delta)$

$$\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a) \right| \leq \varepsilon \qquad (i, j = 1, 2)$$

en $\big|\, |\det D\varphi(x)| - |\det D\varphi(a)| \,\big| \leq \varepsilon$. Zij nu $I = I_1 \times I_2 \subseteq B(a, \delta)$ een bijna-vierkant met zijden $\ell_j := \mu(I_j)$ $(j = 1, 2)$. Noem b het linkeronderhoekpunt van het bijna-vierkant I. Voor elke $x \in I$ bestaat er, door de middelwaardestelling in twee veranderlijken, op het open lijnstuk dat b en x verbindt een punt ξ waarvoor

$$\varphi_1(x) - \varphi_1(b) = (x_1 - b_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\xi) + (x_2 - b_2)\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(\xi),$$

zodat door de driehoeksongelijkheid

$$\left| \varphi_1(x) - \varphi_1(b) - (x_1 - b_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(a) + (x_2 - b_2)\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(a) \right| \overset{[3]}{\leq} \varepsilon(|x_1 - b_1| + |x_2 - b_2|) \leq \varepsilon(\ell_1 + \ell_2).$$

Analoog is

$$\left| \varphi_2(x) - \varphi_2(b) - (x_1 - b_1)\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(a) + (x_2 - b_2)\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(a) \right| \leq \varepsilon(\ell_1 + \ell_2).$$

Matricieel genoteerd `[4]` is dus, gebruik makend van $\mu(I) = \ell_1 \ell_2 \overset{[5]}{\geq} \frac{\ell_j^2}{2}$ (voor $j = 1, 2$),

$$\|\varphi(x) - \varphi(b) - D\varphi(a)(x - b)\| \overset{[6]}{\leq} \sqrt{2}\varepsilon(\ell_1 + \ell_2) \leq 4\varepsilon\sqrt{\mu(I)}.$$

Omdat $x - b$ behoort tot het parallellogram P opgespannen door $(\ell_1, 0)$ en $(0, \ell_2)$, behoort $D\varphi(a)(x - b)$ tot het parallellogram $D\varphi(a)(P)$ opgespannen door

$$D\varphi(a)\begin{pmatrix} \ell_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \ell_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a) \quad \text{en} \quad D\varphi(a)\begin{pmatrix} 0 \\ \ell_2 \end{pmatrix} = \ell_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a).$$

Wegens het gedrag van de maat van een parallellogram onder een lineaire transformatie is $\mu(D\varphi(a)(P)) = \ldots$ `[7]`. Wegens de translatie-invariantie van de Lebesgue-maat en lemma 4 (toegepast op het parallellogram $D\varphi(a)(P)$) is dus (mits $\varepsilon \leq 1$ `[8]`)

$$\overline{\mu}(\varphi(I)) \overset{[9]}{\leq} |\det D\varphi(a)|\, \mu(I) + 16\varepsilon\sqrt{\mu(I)}\Big(\ell_1 \Big\|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a)\Big\| + \ell_2 \Big\|\frac{\partial \varphi}{\partial y}(a)\Big\| + 16\varepsilon\sqrt{\mu(I)}\Big)$$

$$\overset{[10]}{\leq} \big(|\det D\varphi(a)| + C\varepsilon \big)\mu(I) \overset{[11]}{\leq} \big(\inf_{x \in I} |\det D\varphi(x)| + \varepsilon + C\varepsilon \big)\mu(I) \overset{[12]}{\leq} \int_I \big(|\det D\varphi| + (C+1)\varepsilon \big)$$

waarbij C een constante is die enkel van φ en a afhangt. □

[1] Maak een figuur die aangeeft waarom lemma 4 geldt.
[2] Vul in.
[3] Verklaar.
[4] Schrijf expliciet als een matrix.
[5-6] Verklaar.
[7] Vul in.
[8] Mogen we aannemen dat $\varepsilon \leq 1$? Zo ja, waarom? Zo nee, hoe volgt de stelling voor algemene $\varepsilon > 0$?
[9] Verklaar.
[10] Geef expliciet een waarde van C waarvoor deze ongelijkheid geldt.
[11-12] Verklaar.