Oefeningenexamen Projectieve Meetkunde: oplossingen

2de bachelor Wiskunde

academiejaar 2011-2012

1 Eerste zittijd

Oefening 1.1. Een $\{d, m\}$-boog in PG$(2, q)$ is een verzameling van $m \geq 1$ punten zodat iedere rechte er hoogstens d bevat, $1 \leq d \leq q$. We definiëren $m_q(d) := q(d-1) + d$.

(i) Zij $\mathcal{B}$ een $\{d, m\}$-boog in PG$(2, q)$. Toon aan dat $m \leq m_q(d)$.

Een $\{d, m_q(d)\}$-boog in PG$(2, q)$ noemen we bijgevolg een d-maximale boog.

(ii) Geef een voorbeeld van een 1-maximale boog en van een q-maximale boog in PG$(2, q)$.

(iii) Zij $\mathcal{B}$ een $\{d, m\}$-boog in PG$(2, q)$. Als een rechte i punten van $\mathcal{B}$ bevat, noemen we deze rechte een i-secant. Tel het aantal i-secanten aan een d-maximale boog voor alle $i \in \{0, \ldots, q+1\}$. Tel ook het aantal i-secanten door een vast punt Q dat niet op de maximale boog ligt.

(iv) Zij $\mathcal{B}$ een d-maximale boog in PG$(2, q)$. Leid uit (iii) af dat $d \mid q$. Bewijs dat een $\frac{q}{d}$-maximale boog bestaat.

(v) Veronderstel dat q even is. Zij C een absoluut irreduciebele kegelsnede met kern N en zij α een niet-triviale homologie met centrum N. Toon aan dat $C^\alpha \cap C = \emptyset$ als en slechts als de as van α de kegelsnede C niet snijdt.

(vi) Veronderstel dat $q \geq 4$ even is. Construeer een 4-maximale boog. Hint: beschouw absoluut irreduciebele kegelsneden met eenzelfde kern.

Oplossing 1.1. (i) Kies een punt P in $\mathcal{B}$. Elke rechte door P bevat hoogstens $d-1$ andere punten. Bijgevolg bevat $\mathcal{B}$ hoogstens $1 + (q+1)(d-1) = q(d-1) + d = m_q(d)$ punten. Met andere woorden, $m \leq m_q(d)$.

(ii) We weten dat $m_q(1) = 1$. Bijgevolg is een verzameling met één punt een 1-maximale boog. We weten ook dat $m_q(q) = q^2$. Zij ℓ een rechte in PG$(2, q)$ en zij $\mathcal{B}$ de puntenverzameling van PG$(2, q) \setminus \ell$. Dan is $|\mathcal{B}| = q^2$. Aangezien iedere rechte minstens één punt van de vaste rechte ℓ bevat, bevat iedere rechte hoogstens q punten van $\mathcal{B}$. Dus is $\mathcal{B}$ een q-maximale verzameling.

(iii) Uit de definitie volgt onmiddellijk dat het aantal i-secanten gelijk is aan 0 als $i > d$. Bekijk nu een punt P van $\mathcal{B}$. Op iedere rechte door P liggen er hoogstens $d-1$ punten verschillend van P. Aangezien $\mathcal{B}$ een d-maximale boog is, moeten er op al deze rechten precies $d-1$ extra punten liggen. Hieruit volgt dat er op een rechte hetzij 0 hetzij d punten van $\mathcal{B}$ liggen. Het aantal i-secanten bedraagt dus 0 als $i \neq 0, d$.

We tellen nu het aantal d-secanten met behulp van een dubbele telling. We tellen namelijk het aantal koppels (P, ℓ) met P een punt op $\mathcal{B}$ en ℓ een d-secant. Noteer het aantal d-secanten als x. We vinden

$$x.d = m_q(d).(q+1) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{((d-1)q+d)(q+1)}{d}\ .$$

Het aantal 0-secanten is dan gelijk aan

$$(q^2+q+1) - \frac{((d-1)q+d)(q+1)}{d} = \frac{q(q-d+1)}{d}\ .$$

Aangezien er enkel 0-secanten en d-secanten zijn, liggen alle punten van de d-maximale boog op een d-secant door Q. Het aantal d-secanten door Q bedraagt dus $\frac{m_q(d)}{d} = \frac{(d-1)q}{d} + 1$; het aantal 0-secanten bedraagt dan $(q+1) - \left(\frac{(d-1)q}{d} + 1\right) = \frac{q}{d}$.

(iv) We halen uit (iii) dat het aantal 0-secanten door een vast punt niet op $\mathcal{B}$ gelijk is aan $\frac{q}{d}$. Aangezien dit aantal een geheel getal is, volgt onmiddellijk dat $d \mid q$.

Beschouw nu de verzameling $\mathcal{N}$ van 0-secanten ten opzichte van $\mathcal{B}$. We weten dat er door ieder punt niet op $\mathcal{B}$, precies $\frac{q}{d}$ 0-secanten gaan en dat door de punten van $\mathcal{B}$ geen 0-secanten gaan. We gaan nu over naar het duale vlak, dat isomorf is met $\mathrm{PG}(2, q)$. De verzameling $\mathcal{N}$ bepaalt hierin een verzameling $\mathcal{N}'$ van punten. De rechten bevatten 0 of $\frac{q}{d}$ punten van deze verzameling. Bovendien,

$$|\mathcal{N}'| = |\mathcal{N}| = \frac{q(q-d+1)}{d} = q\left(\frac{q}{d} - 1\right) + \frac{q}{d} = m_q(\frac{q}{d})$$

De verzameling $\mathcal{N}'$ bepaalt dus een $\frac{q}{d}$-maximale boog in $\mathrm{PG}(2, q)$.

(v) Zij ℓ de as van α. Veronderstel eerst dat ℓ een punt R van C bevat. Dan is $R^\alpha = R$ omdat R op de as ℓ ligt. Er geldt dan duidelijk dat $C^\alpha \cap C \neq \emptyset$.

Veronderstel nu dat ℓ en C disjunct zijn. Zij S een willekeurig punt van C. Dan ligt S^α op de rechte $\langle N, S \rangle$. Aangezien de rechten door N precies de raaklijnen aan C zijn, is S^α sowieso verschillend van de punten van $C \setminus \{S\}$. Als $S = S^\alpha$, wordt S door α gefixeerd. Dit zou betekenen dat $S = N$, of dat S op de as ligt. Het eerste is duidelijk vals; het tweede is strijdig met de onderstelling. Bijgevolg is $S \neq S^\alpha$ en dus ligt S^α niet op C. Hieruit volgt dat $C \cap C^\alpha = \emptyset$ omdat S willekeurig is.

(vi) Een 4-maximale boog bevat $m_q(4) = 3q+4$ punten. Beschouw de kegelsnede C met kern N. Zij ℓ een rechte die C niet snijdt. Wegens (v) bepaalt een homologie met centrum N en as ℓ een kegelsnede disjunct aan C. Deze kegelsnede heeft dan dezelfde kern. Als α en β twee verschillende homologieën met centrum N en as ℓ zijn, dan is $\mathcal{B} := C \cup C^\alpha \cup C^\beta \cup \{N\}$ bijgevolg een verzameling van $3q+4$ punten (merk op dat $\alpha^{-1}\beta \neq \mathbb{1}$). Iedere rechte door N snijdt $\mathcal{B}$ dan in 4 punten omdat de rechten door de kern de raaklijnen zijn. Een rechte niet door de kern snijdt een kegelsnede in 0 of 2 punten. Een rechte niet door N snijdt $\mathcal{B}$

dus in 0, 2, 4 of 6 punten. We tonen nu aan dat we α en β zo kunnen kiezen dat iedere rechte niet door N, 0 of 4 punten van $\mathcal{B}$ bevat.

Kies $c \in \mathbb{F}_q \setminus \{1\}$ zo dat $\mathrm{tr}(c) = 1$; dit is steeds mogelijk als $q \geq 4$. Zij C de kegelsnede bepaald door de vergelijking $X_1^2 + X_0X_2 = 0$, met als kern $N(0, 1, 0)$. Zij ℓ de rechte $X_0 + X_1 + cX_2 = 0$. Deze rechte snijdt ℓ inderdaad niet want de vergelijking $x^2 + x + c = 0$ heeft geen oplossingen. Een willekeurige homologie met as ℓ en centrum N wordt bepaald door een matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+k & k & (1+k)c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{F}_q^* .$$

We leggen nu de homologieën α ($k = c^{-1}$) en β ($k = (c+1)^{-1}$ - hier gebruiken we dat $c \neq 1$) als volgt vast:

$$\alpha : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c^{-1}+1 & c^{-1} & 1+c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } \beta : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c(c+1)^{-1} & (c+1)^{-1} & c^2(c+1)^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

De kegelsnede C^α, respectievelijk C^β, wordt dan bepaald door de vergelijking $(1+c^2)X_0^2 + c^2X_1^2 + c^2(1+c^2)X_2^2 + X_0X_2 = 0$, respectievelijk $c^2X_0^2 + (1+c^2)X_1^2 + c^4X_2^2 + X_0X_2 = 0$. Een rechte ℓ' niet door N, wordt gegeven door een vergelijking van de vorm $aX_0 + X_1 + bX_2 = 0$. Deze rechte snijdt C als en slechts als de vergelijking $a^2X_0^2 + X_0X_2 + b^2X_2^2 = 0$ oplossingen heeft als en slechts als $A := \mathrm{tr}(a^2b^2) = 0$. Op dezelfde manier kan men vinden dat ℓ' de kegelsnede C^α snijdt als en slechts als $B := \mathrm{tr}((1 + c^2 + c^2a^2)(c^2 + c^4 + c^2b^2)) = 0$ en dat ℓ' de kegelsnede C^β snijdt als en slechts als $C := \mathrm{tr}((c^2 + a^2 + c^2a^2)(c^4 + b^2 + c^2b^2)) = 0$. Als deze vergelijkingen oplossingen hebben, hebben ze er steeds precies twee.

We weten dat de spoorafbeelding voldoet aan $\mathrm{tr}(x + y) = \mathrm{tr}(x) + \mathrm{tr}(y)$. Dus:

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}(a^2b^2) + \mathrm{tr}((1 + c^2 + c^2a^2)(c^2 + c^4 + c^2b^2)) + \mathrm{tr}((c^2 + a^2 + c^2a^2)(c^4 + b^2 + c^2b^2)) \\ &\quad = \mathrm{tr}\Big(a^2b^2 + c^2 + c^6 + c^2(1 + c^2)(c^2a^2 + b^2) + c^4a^2b^2 \\ &\qquad + c^6 + c^2(1 + c^2)(c^2a^2 + b^2) + a^2b^2 + c^4a^2b^2\Big) = \mathrm{tr}(c^2) = \mathrm{tr}(c) = 1 \end{aligned}$$

Bijgevolg zijn van het drietal $\{A, B, C\}$ hetzij drie elementen gelijk aan 1, hetzij twee elementen gelijk aan 0 en één gelijk aan 1. In het eerste geval bevat ℓ' geen punten van $\mathcal{B}$; in het tweede geval bevat ℓ' precies 4 punten van $\mathcal{B}$. We besluiten dat $\mathcal{B}$ een 4-maximale boog is.

Oefening 1.2. Zij β een polariteit van $\mathrm{PG}(n, \mathbb{F})$, $\mathbb{F}$ een veld, $n \geq 3$. Beschouw de volgende uitspraak: zij ℓ een willekeurige rechte in $\mathrm{PG}(n, \mathbb{F})$, dan zijn alle punten op ℓ absoluut als en slechts als ℓ zelf absoluut is.

(i) Veronderstel dat β orthogonaal of hermitisch is. Toon aan dat deze uitspraak waar is.

(ii) Toon aan dat deze uitspraak niet waar is als β een symplectische polariteit is.

(iii) Veronderstel dat β een pseudopolariteit is. Toon aan dat deze uitspraak waar is als en slechts als $\pi \subseteq \pi^\beta$, met π de deelruimte van de absolute punten.

Oplossing 1.2. Noteer de matrix van de polariteit als A en het veldautomorfisme als θ. Het is onmiddellijk duidelijk dat alle punten op ℓ absoluut zijn als ℓ zelf absoluut is. Immers, $P \subset \ell \subseteq \ell^\beta \subset P^\beta$ voor alle $P \in \ell$. We kijken nu in beide gevallen naar de omgekeerde bewering: ℓ is absoluut als alle punten op ℓ absoluut zijn.

(i) Kies $P(x)$ en $Q(y)$ op ℓ. Het volstaat om aan te tonen dat $P \in Q^\beta$. Daaruit volgt immers dat $Q \in P^\beta$ en dus dat $\langle P, Q\rangle \subseteq P^\beta \cap Q^\beta = \langle P, Q\rangle^\beta$. We veronderstellen dat alle punten op ℓ absoluut zijn. Dan geldt er dat $(\lambda x + \mu y)A(\lambda x + \mu y)^{t\theta} = 0$ voor alle λ en μ. Dus:

$$\begin{aligned} 0 = (\lambda x + \mu y)A(\lambda x + \mu y)^{t\theta} &= \lambda^{\theta+1} xAx^{t\theta} + \mu^{\theta+1} yAy^{t\theta} + \lambda\mu^\theta xAy^{t\theta} + \lambda^\theta \mu yAx^{t\theta} \\ &= \lambda\mu^\theta xAy^{t\theta} + (\lambda\mu^\theta xA^{t\theta} y^{t\theta})^{t\theta}\ . \end{aligned}$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van het feit dat P en Q absolute punten zijn.

We bekijken nu de orthogonale en hermitische polariteiten apart. We onderstellen eerst dat A orthogonaal is. Dan is $A^t = A$, $\theta = \mathbb{1}$ en $\mathrm{kar}(\mathbb{F}) \neq 2$. Er volgt dat $0 = 2\lambda\mu xAy^t$. We kiezen $\lambda, \mu \neq 0$ en vinden dat $xAy^t = 0$. Dit betekent dat $P \in Q^\beta$.

Nu onderstellen we dat β hermitisch is. Dan is $A^{t\theta} = A$ en $\theta \neq \mathbb{1}$. Er volgt dat $0 = y + y^\theta$ met $y = \lambda\mu^\theta xAy^{t\theta}$. We stellen $\mu = 1$. Als $a = xAy^{t\theta} \neq 0$, kunnen we λ zo kiezen dat y geen oplossing is van de vergelijking $X^\theta + X = 0$, een strijdigheid. Dus moet $xAy^{t\theta} = 0$. Dit betekent dat $P \in Q^\beta$.

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van het feit dat niet alle elementen van $\mathbb{F}$ een oplossing zijn van $X^\theta + X = 0$. Als $\mathrm{kar}(\mathbb{F}) \neq 2$ is het duidelijk dat 1 geen oplossing is. Als $\mathrm{kar}(\mathbb{F}) = 2$, volgt dit uit het feit dat $\theta \neq \mathbb{1}$.

(ii) Zij P een willekeurig punt. Kies $Q \in \mathrm{PG}(n, \mathbb{F}) \setminus P^\beta$. De rechte $\ell = \langle P, Q\rangle$ is dan niet absoluut. Alle punten op ℓ zijn echter absoluut aangezien alle punten absoluut zijn ten opzichte van een symplectische polariteit, ook die op ℓ.

(iii) We onderstellen nu dat β een pseuodpolariteit is. Als $U \subseteq U^\beta$, volgt voor ieder absoluut punt Q dat $\pi \subseteq \pi^\beta \subseteq Q^\beta$, en dus dat $P \in Q^\beta$, met P een willekeurig ander absoluut punt. Iedere rechte door twee absolute punten, die dus in π ligt en enkel absolute punten bevat, is bijgevolg een absolute rechte, net zoals in (i). Als $U \nsubseteq U^\beta$, kunnen we een absoluut punt P vinden waarvoor $U \nsubseteq P^\beta$. Kies dan $Q \in U \setminus P^\beta$. De rechte $\langle P, Q\rangle$ bevat dan enkel absolute punten, maar is zelf niet absoluut.

2 Tweede zittijd

Oefening 2.1. Beschouw de volgende matrix over een veld $\mathbb{F}_q$, $q = p^h$ met p priem:

$$A := \begin{pmatrix} a & c & b & 1 \\ b & 0 & -e^2 & d^p \\ e & c & 0 & 0 \\ 1 & d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zij θ een involutie in $\mathrm{Aut}(\mathbb{F})$.

(i) Geef de nodige en voldoende voorwaarden op a, b, c, d, e, q en θ opdat A en θ een pseudopolariteit in $\mathrm{PG}(3, q)$ zouden bepalen. (Los iedere vergelijking die je vindt, ook op!)

(ii) Geef de nodige en voldoende voorwaarden op a, b, c, d, e, q en θ opdat A en θ een orthogonale polariteit in $\mathrm{PG}(3, q)$ zouden bepalen. (Los iedere vergelijking die je vindt, ook op!)

Stel $a = 0$, $b = c = e = -1$, p oneven, $\theta = \mathbb{1}$ en veronderstel dat d voldoet aan de voorwaarde die je vond in (ii). Noteer de verzameling van absolute punten van β dan als Ω.

(iii) Zij P het punt $(0, 0, 1, 0)$. Bepaal de punten op $P^\beta \cap \Omega$. Hoeveel punten liggen er in deze doorsnede?

(iv) Zij π het vlak bepaald door $X_3 = 0$. Hoeveel punten liggen er in $\pi \cap \Omega$? Bepaal ook π^β.

Oplossing 2.1. (i) Opdat A en θ een pseudopolariteit zouden bepalen, moet $|A| \neq 0$, moet $A^t = A$, moet $\theta = \mathbb{1}$, moet $\mathrm{kar}(\mathbb{F}) = 2$ en moet minstens één van de diagonaalelementen van A verschillend zijn van 0. Hieruit volgt dat $a \neq 0$, dat $p = 2$, dat $e = b = c = e^2$ en dat $d = d^2$. We vinden dat $b = c = e \in \{0, 1\}$ en dat $d \in \{0, 1\}$. Door een eenvoudige berekening vinden we ook dat $|A| = b^2(d-1)^2$. Bijgevolg moet $d = 0$ en $b = c = e = 1$. De voorwaarden zijn dus $a \neq 0$, $b = c = e = 1$, $d = 0$, $p = 2$ en $\theta = \mathbb{1}$.

(ii) Opdat A en θ een orthogonale polariteit zouden bepalen, moet $|A| \neq 0$, moet $A^t = A$, moet $\theta = \mathbb{1}$ en moet $\mathrm{kar}(\mathbb{F}) \neq 2$. Hieruit volgt dat dat $p > 2$, dat $e = b = c = -e^2$ en dat $d = d^p$. We vinden dat $b = c = e \in \{-1, 0\}$ en dat $d \in \mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_q$. Door een eenvoudige berekening vinden we ook dat $|A| = b^2(d-1)^2$. Bijgevolg moet $d \neq 1$ en $b = c = e = -1$. De voorwaarden zijn dus $b = c = e = -1$, $d \in \mathbb{F}_p \setminus \{1\} \subset \mathbb{F}_q$, $p > 2$ en $\theta = \mathbb{1}$.

(iii) Uit (ii) volgt dat β een orthogonale polariteit is. Het vlak P^β heeft als vergelijking $X_0 + X_1 = 0$. De verzameling Ω van absolute punten wordt gegeven door $-X_0X_1 - X_0X_2 + X_0X_3 - X_1X_2 + dX_1X_3 = 0$ De doorsnede $P^\beta \cap \Omega$ wordt dan gegeven door

$$\begin{cases} X_0 + X_1 = 0 \\ -X_0X_1 - X_0X_2 + X_0X_3 - X_1X_2 + dX_1X_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_0 + X_1 = 0 \\ X_0^2 + X_0X_3 - dX_0X_3 = 0 \end{cases}$$

We vinden dus twee rechten in de doorsnede, namelijk

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} X_0 + X_1 = 0 \\ X_0 - (d-1)X_3 = 0 \end{cases}$$

Deze rechten kunnen ook genoteerd worden als $\langle P, (0, 0, 0, 1)\rangle$ en $\langle P, (d-1, 1-d, 0, 1)\rangle$. Op deze twee rechten samen liggen $2q + 1$ punten.

(iv) De doorsnede $\pi \cap \Omega$ wordt gegeven door

$$\begin{cases} X_3 = 0 \\ -X_0X_1 - X_0X_2 + X_0X_3 - X_1X_2 + dX_1X_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_3 = 0 \\ -X_0X_1 - X_0X_2 - X_1X_2 = 0 \end{cases}$$

Dit stelsel bepaalt duidelijk een absoluut irreduciebele kegelsnede in een vlak. De doorsnede bevat dus $q + 1$ punten.

We bepalen nu π^β. Dit kan op meerdere manieren. We geven er één. Stel $\pi^\beta = (x, y, z, w)$. Dan moet

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & d \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & d & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De oplossing van dit stelsel is $(x, y, z, w)^t = \lambda(-\frac{1}{d-1}, \frac{1}{d-1}, -\frac{d+1}{(d-1)^2}, -\frac{2}{(d-1)^2})^t$. Het punt P wordt dan (bijvoorbeeld) gegeven door $(d-1, 1-d, d+1, 2)$.

Oefening 2.2. Beschouw een punt P, een vlak π en een 4-ruimte τ in $\mathrm{PG}(n, \mathbb{F})$, $n \geq 5$ en $\mathbb{F}$ een veld, zodanig dat $P \in \pi \subset \tau$. Beschouw de volgende verzameling vlakken: de vlakken door P die π in een rechte snijden, de vlakken door P in τ en de vlakken in τ die π in een rechte snijden. Noteer deze verzameling als $\mathcal{S}$.

(i) Toon aan dat elke twee vlakken in $\mathcal{S}$ minstens een punt gemeen hebben.

(ii) Zij π' een vlak dat een punt gemeen heeft met alle vlakken van $\mathcal{S}$. Toon aan dat $\pi' \in \mathcal{S}$.

(iii) Stel $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$. Tel het aantal vlakken in $\mathcal{S}$.

Oplossing 2.2. We noteren de verzamelingen van de drie types vlakken als volgt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1 &:= \{V \text{ vlak in } \mathrm{PG}(n, q) |\ P \in V, \dim(V \cap \pi) = 1\},\\
\mathcal{S}_2 &:= \{V \text{ vlak in } \mathrm{PG}(n, q) |\ P \in V, V \subset \tau\},\\
\mathcal{S}_3 &:= \{V \text{ vlak in } \mathrm{PG}(n, q) |\ \dim(V \cap \pi) = 1, V \subset \tau\}.
\end{aligned}$$

(i) In de volgende redenering gebruiken we vaak de identiteit van Grassmann, zonder dit steevast te vermelden. Beschouw de vlakken V en V'. Als V en V' beide behoren tot $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, hebben ze sowieso het punt P gemeen. Als V en V' beide behoren tot $\mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$, hebben ze minstens een punt gemeen aangezien V en V' dan beide in de 4-ruimte τ bevat zijn. Als V en V' beide behoren tot $\mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_1$, hebben ze sowieso een punt van π gemeen aangezien beide vlakken dan een rechte van π bevatten. Merk nu op dat minstens één van deze drie gevallen zich moet voordoen.

(ii) Veronderstel eerst dat π' niet bevat is in τ. Dan is er een vlak in $\mathcal{S}_2$ te vinden dat geen punt gemeen heeft met π' tenzij $P \in \pi'$. Bovendien is er dan ook een vlak in $\mathcal{S}_3$ te vinden dat geen punt gemeen heeft met π' tenzij $\dim(\pi' \cap \pi) \geq 1$. Aangezien π' met alle vlakken van $\mathcal{S}$ een punt gemeen heeft, moet π' door P gaan en moet π' een rechte in π bevatten of samenvallen met π. In het eerste geval behoort π' tot $\mathcal{S}_1$. In het tweede geval ligt π' in τ, een strijdigheid.

We kunnen nu aannemen dat $\pi' \subset \tau$. Veronderstel dat $P \notin \pi'$. Dan kunnen we een vlak in $\mathcal{S}_1$ vinden (niet in τ) dat geen punt gemeen heeft met π', tenzij $\pi' \cap \pi$ een rechte is. Dan volgt echter onmiddellijk dat dat $\pi' \in \mathcal{S}_3$.

Tot slot, als $\pi' \subset \tau$ en $P \in \pi'$, dan behoort π' tot $\mathcal{S}_2$. In alle gevallen volgt dus dat $\pi' \in (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3) = \mathcal{S}$.

(iii) We tellen eerst de verschillende verzamelingen apart.

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}_1| &= (q+1)\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1} - 1\right)\\
|\mathcal{S}_2| &= \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = (q^2+1)(q^2+q+1)\\
|\mathcal{S}_3| &= (q^2+q+1)\left(\frac{q^3-1}{q-1} - 1\right)
\end{aligned}$$

Bij de eerste telling hebben we eerst een rechte door P in π gekozen en daarna het aantal vlakken hierdoor, verschillend van π geteld. De tweede telling is onmiddellijk duidelijk.

Bij de derde telling hebben we eerst een rechte in π gekozen. We tellen nu de doorsnedes van deze verzamelingen. Hierbij maken we gebruik van dezelfde telprincipes.

$$|\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2| = |\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_3| = |\mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3| = |\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3| = (q+1)\left(\frac{q^3-1}{q-1} - 1\right)$$

We tellen nu het aantal vlakken in $\mathcal{S}$ met behulp van het inclusie-exclusieprincipe:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}| &= |\mathcal{S}_1| + |\mathcal{S}_2| + |\mathcal{S}_3| - |\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2| - |\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_3| - |\mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3| + |\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3| \\
&= (q+1)\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1} - 1\right) + (q^2+1)(q^2+q+1) + (q^2+q+1)\left(\frac{q^3-1}{q-1} - 1\right) \\
&\qquad - 2(q+1)\left(\frac{q^3-1}{q-1} - 1\right) \\
&= (q+1)\frac{q^{n-1}-1}{q-1} + 2q^4 + q^3 - q\ .
\end{aligned}$$

Oefening 2.3. Zij β een polariteit van $\mathrm{PG}(n,\mathbb{F})$ en zij U een deelruimte van $\mathrm{PG}(n,\mathbb{F})$, $\mathbb{F}$ een veld. Noteer $U \cap U^\beta$ als $\widetilde{U}$ en zij $\overline{U}$ een deelruimte van U, disjunct aan $\widetilde{U}$, en zodanig dat ze samen met $\widetilde{U}$ de deelruimte U opspant. Veronderstel dat $\dim(\overline{U}) \geq 2$.

(i) Toon aan dat alle deelruimten van $\widetilde{U}$ absoluut zijn.

(ii) We definiëren de afbeelding ϕ als volgt: $\overline{U} \to \overline{U} : V \mapsto V^\beta \cap \overline{U}$ voor alle deelruimten V van $\overline{U}$. Toon aan dat ϕ een polariteit op $\overline{U}$ is.

(iii) Beschouw de polariteiten β en ϕ zoals hierboven. Zijn deze noodzakelijk van hetzelfde type? Zo ja, bewijs dit. Zo nee, geef dan voor ieder type van de polariteit β de mogelijke types voor ϕ, en bewijs dit.

Oplossing 2.3. (i) Zij V een deelruimte van $\widetilde{U}$. Dan geldt er duidelijk:

$$V \subseteq U \cap U^\beta \subseteq \left\langle U, U^\beta \right\rangle \subseteq V^\beta\ .$$

De laatste inclusie geldt door toepassing van de polariteit op de eerste inclusie.

(ii) Het is onmiddellijk duidelijk dat ϕ deelruimten van $\overline{U}$ op deelruimten van $\overline{U}$ afbeeldt. Opdat ϕ een correlatie zou zijn, moet $V \subseteq V' \Leftrightarrow V'^\phi \subseteq V^\phi$ voor alle deelruimten V, V' in $\overline{U}$. Veronderstel eerst dat $V \subseteq V'$. Dan volgt onmiddellijk dat $V'^\beta \subseteq V^\beta$ en dus dat $V'^\phi = V'^\beta \cap \overline{U} \subseteq V^\beta \cap \overline{U} = V^\phi$.

Vooraleer de andere richting te bewijzen, tonen we aan dat $\overline{U} \cap \overline{U}^\beta = \emptyset$. We weten dat $\left\langle \overline{U}, \widetilde{U} \right\rangle = U$. Hieruit volgt $U^\beta = \overline{U}^\beta \cap \widetilde{U}^\beta = \overline{U}^\beta \cap \left\langle U, U^\beta \right\rangle$. We weten dat $\overline{U} \cap U^\beta = \emptyset$, maar ook dat $\overline{U} \subset \left\langle U, U^\beta \right\rangle$. Dus moet $\overline{U} \cap \overline{U}^\beta = \emptyset$.

Veronderstel nu dat $V'^\phi \subseteq V^\phi$. Dan weten we dat $V'^\beta \cap \overline{U} \subseteq V^\beta \cap \overline{U}$. We passen nu β toe op beide leden. We vinden dat $\left\langle V, \overline{U}^\beta \right\rangle \subseteq \left\langle V', \overline{U}^\beta \right\rangle$. Aangezien V en V' in $\overline{U}$ bevat zijn en $\overline{U} \cap \overline{U}^\beta = \emptyset$, volgt hieruit dat $V \subseteq V'$.

We gaan tot slot na dat $\phi^2 = \mathbb{1}$. Zij V een deelruimte van $\overline{U}$. Dan geldt er

$$V^{\phi^2} = (V^\beta \cap \overline{U})^\beta \cap \overline{U} = \left\langle V, \overline{U}^\beta \right\rangle \cap \overline{U} = V\ ,$$

waarbij we in de laatste overgang opnieuw gebruik hebben gemaakt van $\overline{U} \cap \overline{U}^\beta = \emptyset$.

(iii) Noteer $\dim(\overline{U}) = k$. Kies nu het geraamte in $\mathrm{PG}(n, \mathbb{F})$ zodanig dat $\overline{U} = \langle P_0, \ldots, P_k \rangle$, met $P_i = \langle e_i \rangle$, $0 \leq i \leq n$. Zij A de matrix en θ het veldautomorfisme behorend bij β. Zij A' de $(k+1) \times (k+1)$-deelmatrix linksboven A (corresponderend met $X_0, \ldots, X_k$). Dan wordt ϕ bepaald door A' en θ. Immers, voor een punt $Q = \langle x \rangle \in \overline{U}$ geldt dat Q^ϕ wordt gegeven door

$$\begin{cases} Ax^\theta = 0 \\ X_{k+1} = \cdots = X_n = 0 \end{cases}$$

Wanneer we nu de beperking tot $\overline{U}$ bekijken (met $\overline{x}$ de restrictie van x tot de eerste $k+1$ coördinaten), vinden we $A'\overline{x}^\theta = 0$. Het veldautomorfisme en het onderliggend veld vallen dus samen voor β en ϕ. Bovendien is het ook duidelijk dat $A'^t = A'$ als $A^t = A$ en dat $A'^t = -A'$ als $A^t = -A$. Als alle diagonaalelementen van A gelijk zijn aan 0 is dit duidelijk ook het geval voor A'. Uit deze observaties volgt al dat als β orthogonaal, symplectisch en hermitisch is, dat ϕ hetzelfde type heeft als β. Echter, als β een pseudopolariteit is, kan ϕ zowel een pseudopolariteit als een symplectische polariteit zijn. Dit laatste komt voor als geen van de niet-nul elementen op de diagonaal op één van de eerste $k+1$ posities staat.