Oefeningen Algebra I

dinsdag 17 januari 2012 – tweede bachelor wiskunde

`Vermeld duidelijk je naam.`
`Los elke oefening op op een afzonderlijk blad.`

1. Zij G een eindige groep die werkt op een verzameling A. Onderstel dat voor elke twee paren (a_1, a_2) en (b_1, b_2) van elementen $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$, waarbij $a_1 \neq a_2$ en $b_1 \neq b_2$, er een element $g \in G$ bestaat zodat $a_1^g = b_1$ en $a_2^g = b_2$. Toon aan dat als $|A| = n$ dat dan $|G|$ deelbaar is door $n(n-1)$.

2. Zij G een enkelvoudige groep met $|G| = 60$.
   (i) Bewijs dat $n_2(G) = 5$, $n_3(G) = 10$ en $n_5(G) = 6$.
   (ii) Toon aan dat G eén deelgroep H van orde 12 heeft.
   (iii) Toon aan dat H juist 5 toegevoegden heeft.

3. Zij R een Euclidisch domein met Euclidische functie d zodanig dat
   (A) $d(a) \leq d(ab)$
   (B) $d(a+b) \leq \max\{d(a), d(b)\}$

   voor alle $a, b \in R \setminus \{0\}$.
   (i) Zij $a, b \in R \setminus \{0\}$, toon aan dat $d(a) = d(ab)$ als en slechts als $b \in R^\times$.
   (ii) Toon aan dat $K = \{a \in R \setminus \{0\} \mid d(a) \leq d(1)\} \cup \{0\}$ een veld is.
   (iii) Toon aan dat voor alle $a, b \in R$, $a \neq 0$ er *unieke* elementen $q, r \in R$ bestaan zodat $b = aq + r$ en ofwel $r = 0$, ofwel $d(r) < d(a)$.
   (iv) Toon aan dat $R = K$ of $R \cong K[x]$.

4. Zij R een domein, $M \neq 0$ een R-moduul. Stel

   $$M_t = \{m \in M \mid \exists a \in R \setminus \{0\} \text{ zodat } am = 0\}.$$

   De elementen van M_t worden *torsie-elementen* genoemd.
   (i) Bewijs dat M_t een deelmoduul is van M.
   (ii) Zij M, N R-modulen, bewijs dat $(M \oplus N)_t = M_t \oplus N_t$.
   (iii) Zij R een PID, en M een eindig voortgebracht R-moduul. Toon aan dat M een vrij R-moduul is als en slechts als $M_t = 0$.
   (iv) Zij R een PID, en M een eindig voortgebracht projectief R-moduul. Toon aan dat M een vrij R-moduul is.

Veel succes !