23.I.2012

Wiskundige Analyse I, theorie (= 60% van de punten)

Vraag I. Cursus blz. 139-140.

1. Formuleer en bewijs de 'integraaltest' voor convergentie van een bepaald type reeks.
2. Onderzoek daarmee de convergentie van de harmonische reeks (alleen dié reeks).
3. Definieer daarmee de constante van Euler.

Vraag II.

1. Geef de voorwaarden (niets bewijzen) waaronder

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + (x - x_0)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt$$

   f van klasse C^n over een open interval dat x_0 bevat, zie 10.3.2.

2. Formuleer en bewijs de formule met de andere gedaante van de restterm. Cursus blz. 163. Essentieel is dat $f^{(n)}$ (niet f) continu is over een *compact* interval als $[x_0, x]$.

Vraag III. *(Er is geen verband tussen de drie onderdelen. De antwoorden zijn kort.)*

1. Gegeven: Als f continu over het compact interval $I = [a, b]$ is, dan is $f(I)$ begrensd. *(Dit moet hier niet bewezen worden.)* Bewijs dat $f(I)$ een grootste element heeft. (Uit 'extremumstelling van Weierstrass'.) Cursus blz. 46.

2. Gegeven: f is stuksgewijze Lipschitzcontinu in $[-\pi, \pi]$, met verdeelpunten

$$\underbrace{-\pi = x_0 < x_1 < \dots}_{\leqslant 0} < \underbrace{x_k < \cdots < x_n = \pi}_{>0}.$$

   Bewijs dat $q(t) := \frac{f(t) - f(0+)}{\sin\frac{t}{2}}$ over $]0, x_k[$ integreerbaar is. (Uit 'singuliere integraal van Dirichlet'.) Cursus blz. 173, laatste •. Over het gevraagde interval is de functie $\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}$ niet begrensd en dus ook niet integreerbaar. Na vermenigvuldiging met $f(t) - f(0+)$ wordt zij wél begrensd. (Vergelijk met $\frac{1}{x}$ over $\mathbb{R}^+$: onbegrensd, maar wordt begrensd na vermenigvuldiging met x^2.)

3. Gegeven: een complexe machtreeks $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ met convergentiestraal $R \in \mathbb{R}^+$, en $0 < r < R$. Bewijs dat $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)|a_n|\, r^{n-2}$ convergent is. (Uit 'termsgewijze afleiding van een machtreeks'.) Cursus blz. 156, drie regels: 'De twee keer… absoluut convergent is.' Sommigen hebben (ook) bewezen dat de convergentiestraal bij termsgewijze afleiding bewaard blijft, maar dat was overbodig. (In de opgave staat dat de antwoorden kort zijn.) Velen beweren dat $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)|a_n|\, z^{n-2}$ de twee keer afgeleide van $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ is, en zien dus de absolute-waardestrepen over het hoofd.

Vraag IV.

1. Geef de exacte formule voor $f_n \xrightarrow{A} f$ en voor $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$. Cursus blz. 148. Er komt geen δ aan te pas, dat is voor gelijkmatige *continuïteit.*

2. *Beantwoord met JA of NEEN (enkel J of N, niets anders):*
   (a) Als $\int f$ bestaat, dan is $\int f$ een afleidbare functie. J, blz. 181.
   (b) Is f over $[a, b]$ stuksgewijze Lipschitzcontinu, dan is f over $[a, b]$ gelijkmatig continu. N, zie 11.1.4.
   (c) f^- is een negatieve functie. N, blz. 74 laatste regel.
   (d) Is f integreerbaar maar niet continu, dan is $\left(\int_0^x \left(\int_0^u f\right) du\right)' = \int_0^x f$. J, zie blz. 79 bovenaan. Het integrandum is $\int_0^u f$, dus continu ook al is f dat niet (integraal met veranderlijke bovengrens, zie 6.3.1.).
   (e) De reeks $1 + \frac{1}{2^{\sqrt{2}}} + \frac{1}{3^{\sqrt{2}}} + \frac{1}{4^{\sqrt{2}}} + \dots$ is convergent. J, hyperharmonische met exponent $\sqrt{2} > 1$.
   (f) $f \in \mathcal{R}([a, b]) \iff |f| \in \mathcal{R}([a, b])$. N, '$\Longleftarrow$' is vals, zie blz. 76 punt 3.