Examen Analyse 2 : Theorie (zonder Maple). (11 januari 2012)

---

1. De Fouriertransformatie.

1. Wanneer wordt een functie $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ lokaal stuksgewijze glad genoemd?
2. Geef de definitie van de Fouriergetransformeerde van een lokaal stuksgewijze gladde functie $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die absoluut integreerbaar is.
3. Geef de definitie van de geadjungeerde Fouriergetransformeerde van een lokaal stuksgewijze gladde functie $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die absoluut integreerbaar is.

2. Gewone differentiaalvergelijkingen.

Onderstel dat $\Phi_1(x)$ en $\Phi_2(x)$ oplossingen zijn van de gewone differentiaalvergelijking

$$a_0(x)y"(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = 0,$$

waarbij $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ en $b(x)$ continu zijn op een gemeenschappelijk interval I waarop $a_0(x)$ nergens nul wordt. Dan:

1. Geef de definitie van de Wronskiaan $W(\Phi_1, \Phi_2)(x)$.
2. Bewijs dat deze Wronskiaan ofwel nul is voor elke $x \in I$ ofwel verschillend van nul is voor elke $x \in I$.

3. De Laplace transformatie.

(a) Geef de Laplace getransformeerden van de volgende functies en zeg voor welke waarden van s deze Laplacegetransformeerden gedefinieerd zijn:
1. $e^{ax}, a \in \mathbb{R}$.
2. $\sin(bx), b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

(b) Geef de inverse Laplacegetransformeerden van de volgende functies:
1. $\frac{s}{s^2+b^2}, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$
2. $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

(c) Geef met bewijs de formule voor de Laplacegetransformeerde $\mathcal{L}[x^n](s)$.

4. Partiële differentiaalvergelijkingen.

Beschouw de eendimensionale golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Geef met bewijs de algemene vorm van de oplossingen van deze vergelijking die van het type "reizende golf" zijn. Als toepassing, beschrijf de tijdsevolutie van een oneindige snaar die op het ogenblik $t = 0$ met het profiel

$$\phi(x) = \frac{1}{1 + 8x^2}$$

uit een bewegingloze toestand losgelaten wordt.

Gent, 11 januari 2012

Prof. W. Govaerts

Examen Analyse 2 : Oefeningen (met Maple) (11 januari 2012 - Reeks 1)

---

1. Machtreeksen

Geef met bewijs de convergentiestraal, het convergentieïnterval en het convergentiegebied van de volgende machtreeksen:

- $\Sigma_n n x^n$
- $\Sigma_n n(2x-1)^n$
- $\Sigma_n n^{\frac{1}{n}} x^n$

2. Fourierreeksen

Beschouw de functie f die bepaald is door

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & 2x, & \forall x \in [0,1] \\ & = & 4-2x, & \forall x \in]1,2[\\ & = & 0 & \forall x \in [-2,0] \end{array}$$

a. Geef de bijbehorende Fourierreeks met hoofdperiode 4.
b. Geef afzonderlijk de even en de oneven coefficienten van de reeksontwikkeling.
c. Convergeert de reeksontwikkeling tot de functie f in elk punt van $[0,2]$? Geef de reden waarom of waarom niet.

3. Een dubbelintegraal.

Zij S een regelmatige zeshoek met zijde gelijk aan 1. Bereken de dubbelintegraal over S van het kwadraat van de afstand tot het middelpunt van S.

4. De Laplacetransformatie.

Beschouw de gewone differentiaalvergelijking

$$y" + 9y = \sin 2x. \tag{1}$$

1. Leid de algebraïsche vergelijking voor $\mathcal{L}[y](s)$ af en los deze op naar $\mathcal{L}[y](s)$).
2. Ontbind $\mathcal{L}[y](s)$ in partieelbreuken.
3. Pas de inverse Laplacetransformatie toe op deze ontbinding om de algemene oplossing van (1) te vinden.

Gent, 11 januari 2012

Prof. W. Govaerts