Statistische Fysica 1: 23 januari 2012

THEORIE

1. VRAAG 1 (10 PUNTEN)

   De grootpotentiaal staat in verband met de groot-canonische partitiefunctie via de volgende relatie

   $$\Phi(T,V,\mu) \equiv -kT \ln \mathcal{Z}(T,V,\mu) \; . = -kT \ln \sum_{Nr} \exp \beta \left(\mu N - E_{Nr}\right) \qquad (1)$$

   - Toon aan dat voor een ideaal kwantumgas de volgende relatie geldt

     $$PV = \frac{2}{3} E \; . \qquad (2)$$

   - Startende van de vergelijkingen van Hamilton

     $$\frac{dq_i}{dt} \equiv \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad \text{en,} \quad \frac{dp_i}{dt} \equiv \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \; . \qquad (3)$$

     en het veralgemeend equipartitietheorema

     $$\overline{x_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j}} = \delta_{ij} kT \; , \qquad (4)$$

     toon aan dat uit $PV = \frac{2}{3}E$ volgt dat voor een klassiek en ideaal gas geldt dat

     $$PV = NkT \; . \qquad (5)$$

   - Toon aan dat in een groot-canonisch systeem het gemiddeld aantal deeltjes $\overline{N}$ en de fluctuaties op deze grootheid ΔN berekend kunnen worden uitgaande van de kennis van de grootpotentiaal.

2. VRAAG 2 (20 PUNTEN)

   MONDELING EXAMEN

OEFENINGEN

BIJ HET OPLOSSEN VAN DE OEFENINGEN KUN JE JE CURSUS GEBRUIKEN!

OEFENING 1: EEN SYSTEEM MET TWEE ENERGIE-NIVEAU'S (5 PUNTEN)

Beschouw een systeem van N niet-interagerende spin-3/2 deeltjes met massa m. Elk deeltje kan slechts twee energie-eigenwaarden aannemen: E_0 en E_1. Het systeem bevindt zich in evenwicht en heeft een temperatuur T. De de-Broglie golflengte van de deeltjes is klein in vergelijking met de gemiddelde inter-deeltjes afstanden.

1. Bepaal de entropie voor het systeem in kwestie. Toon aan dat de entropie het verwachte gedrag heeft bij $T \to 0$ en $T \to +\infty$.

2. Bepaal de gemiddelde energie $\overline{E}$ en de warmtecapaciteit van het systeem.

3. Bepaal de temperatuur als functie van $\overline{E}$. Onder welke omstandigheden wordt de temperatuur negatief?

4. Het system wordt gebracht in omstandigheden van negatieve temperatuur. Er zal een netto-stroom van warmte tussen het warmtebad en het systeem ontstaan. In welke richting en zin werkt deze warmtestroom? Leg uit.

OEFENING 2: BEZETTING VAN EEN DEELVOLUME (5 PUNTEN)

Beschouw een klassiek en ideaal gas van N deeltjes met massa m op een temperatuur T. Beschouw nu een deelvolume v van het totaal volume V. Bewijs dat de waarschijnlijkheid p_n om n deeltjes in het deelvolume v te vinden gegeven wordt door een Poisson distributie

$$p_n = \frac{\overline{n}^n e^{-\overline{n}}}{n!} \ ,$$

waarbij $\overline{n}$ staat voor het gemiddeld aantal deeltjes in het volume v.

OEFENING 3: EÉN-DIMENSIONAAL FERMI GAS(10 PUNTEN)

Beschouw het één-dimensionaal ideaal Fermi gas (deeltjes met spin $S = \frac{3}{2}$ en massa m in een lengte L).

1. Bereken de grootpotentiaal $\Phi(T, V, \mu)$ van het systeem.

2. Bereken de chemische potentiaal van het systeem in de limiet $T \gg T_F$ en toon aan dat je wel degelijk de chemische potentiaal van een klassiek en ideaal gas in één dimensie terugvindt. Bereken ook de eerste-orde correctie (kwantummechanisch van oorsprong) op dit resultaat.

3. Bereken de chemische potentiaal van het systeem in de limiet $T \ll T_F$.

4. Bespreek de temperatuursafhankelijkheid van de chemische potentiaal in één dimensie en vergelijk met het resultaat in drie dimensies.