Examen Analyse III

1. Toon aan:

   Eigenschap 1. *Zij $I \subseteq \mathbb{R}^d$ een rechthoek en $A \subseteq I$. Als A een volume heeft, dan is A Lebesgue-meetbaar met $\mu(A) = v(A)$.*

2. Toon aan:

   Eigenschap 2.

   (a) Een afbeelding $f\colon X \to [0, +\infty]$ is meetbaar als en slechts als f de puntsgewijze limiet is van een stijgende rij van niet-negatieve simpele afbeeldingen.

   (b) Een afbeelding $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ is meetbaar als en slechts als f de puntsgewijze limiet is van een rij van simpele afbeeldingen.

   (c) Als f, g meetbare afbeeldingen $X \to \overline{\mathbb{R}}$ zijn en $f(x) + g(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ bestaat voor elke $x \in X$, dan is ook $f + g$ meetbaar.

Examen Analyse III

1. Toon aan:

   Eigenschap 1. *Zij* $I \subseteq \mathbb{R}^d$ *een rechthoek en* $A \subseteq I$. *Dan is* $\overline{v}(A) + \underline{v}(I \setminus A) = v(I)$. *Verder heeft* A *een volume als en slechts als* $\overline{v}(A) + \overline{v}(I \setminus A) = v(I)$.

2. Toon aan:

   Eigenschap 2. *Zij* $\mu(X) < +\infty$. *Zij* $(f_n)_n$ *een rij van integreerbare afbeeldingen* $X \to \mathbb{R}$. *Als* $R \in \mathbb{R}$ *bestaat zo dat* $|f_n| \leq R$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}$, *en* $f_n \to f$ *(puntsgewijs), dan is ook* f *integreerbaar en* $f_n \xrightarrow{L_1} f$. *I.h.b. is* $\lim_n \int_X f_n = \int_X \lim_n f_n$.

   Stelling 3. *Zij* $(f_n)_n$ *een rij van meetbare afbeeldingen* $X \to \overline{\mathbb{R}}$. *Als een integreerbare* $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *bestaat zo dat* $|f_n| \leq g$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}$, *en* $f_n \to f$ *(puntsgewijs), dan is* f *integreerbaar en* $f_n \xrightarrow{L_1} f$. *I.h.b. is* $\lim_n \int_X f_n = \int_X \lim_n f_n$.

   Je mag hierbij de stelling van Egorov gebruiken zonder bewijs.

3. Beantwoord de vragen:

Eigenschap 3. *Zij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van meetbare afbeeldingen $X \to \mathbb{R}$ en zij $f\colon X \to \mathbb{R}$ meetbaar. Dan geldt:*

(a) $f_n \to f$ in maat [1] *als en slechts als*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\exists E \in \mathcal{A} \text{ met } \mu(E^c) \leq \varepsilon)\big(\sup_E |f_n - f| \leq \varepsilon\big).$$

(b) Als $f_n \to f$ bijna gelijkmatig, dan is ook $f_n \to f$ in maat.

(c) Als $f_n \to f$ in maat, dan convergeert een deelrij van $(f_n)_n$ bijna gelijkmatig naar f.

Bewijs. a. $\Rightarrow$: zij $\varepsilon > 0$. Dan bestaat $N \in \mathbb{N}$ zo dat $\mu\{|f - f_n| \geq \varepsilon\} \leq \varepsilon$ voor elke $n \geq N$. Stel $E := \{|f - f_n| < \varepsilon\}$.
$\Leftarrow$: zij $r > 0$ en $\varepsilon > 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ en kies voor elke $n \geq N$ een $E_n \in \mathcal{A}$ met $\mu(E_n^c) \leq \varepsilon$ en $\sup_{E_n} |f_n - f| < r$. Dan is $\mu\{|f - f_n| \geq r\}$[2] $\leq \mu(E_n^c) \leq \varepsilon$. Omdat ε willekeurig is, is dus $\mu\{|f - f_n| \geq r\} \to 0$.
b. De eigenschap in deel (a) verschilt enkel van de karakterisering van bijna gelijkmatige convergentie [3] in het feit dat E hier afhangt van n.
c. We vinden achtereenvolgens
$n_1 \in \mathbb{N}$ en $E_1 \in \mathcal{A}$ met $\mu(E_1^c) \leq 1/2$ en $\sup_{E_1} |f_{n_1} - f| \leq 1/2$
$n_2 > n_1$ en $E_2 \in \mathcal{A}$ met $\mu(E_2^c) \leq 1/2^2$ en $\sup_{E_2} |f_{n_2} - f| \leq 1/2^2$
...
$n_m > n_{m-1}$ en $E_m \in \mathcal{A}$ met $\mu(E_m^c) \leq 1/2^m$ en $\sup_{E_m} |f_{n_m} - f| \leq 1/2^m$
...
Zij nu $\varepsilon > 0$. Kies $M \in \mathbb{N}$ zo dat $1/2^M \leq \varepsilon$. Stel $E := \bigcap_{m>M} E_m$. Dan is

$$\mu(E^c) = \mu\Big(\bigcup_{m>M} E_m^c\Big) \overset{[4]}{\leq} \sum_{m>M} \mu(E_m^c) \leq \sum_{m>M} 1/2^m = 1/2^M \leq \varepsilon$$

en voor elke $m > M$ is $\sup_E |f_{n_m} - f| \leq 1/2^m$. Bijgevolg convergeert $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ bijna gelijkmatig naar f [5]. □

[1] Geef de definitie van convergentie in maat.
[2] Waarom behoort $\{|f - f_n| \geq r\}$ tot het domein van μ?
[3] Geef de definitie van bijna gelijkmatige convergentie en formuleer de karakterisering waarnaar verwezen wordt.
[4-5] Verklaar.

4. Beantwoord de vragen:

Lemma 4. *Zij ν, μ eindige maten op een σ-algebra $\mathcal{A}$. Zij $r \in \mathbb{R}$. Dan zijn equivalent voor $A \in \mathcal{A}$:*

(a) $\begin{cases} \nu(E) \leq r\mu(E), & \forall E \subseteq A, E \in \mathcal{A} \\ \nu(E) \geq r\mu(E), & \forall E \subseteq A^c, E \in \mathcal{A}. \end{cases}$

(b) $\nu(A) - r\mu(A) \leq \nu(E) - r\mu(E), \quad \forall E \in \mathcal{A}.$

Eigenschap 5. *Zij ν, μ eindige maten op een σ-algebra $\mathcal{A}$. Zij $r \in \mathbb{R}$ met $r \geq 0$. Dan bestaat $A_r \in \mathcal{A}$ die aan de eigenschappen van lemma 4 voldoet.*

Stelling 6. *Zij ν, μ eindige maten op een σ-algebra $\mathcal{A}$ met μ volledig en met $\nu \ll \mu$. Dan bestaat een μ-integreerbare afbeelding $f\colon X \to [0, +\infty[$ zo dat $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$ voor elke $E \in \mathcal{A}$. Elke twee afbeeldingen met deze eigenschap zijn μ-b.o. en ν-b.o. gelijk.*

Bewijs. (1) Kies voor elke $r \in \mathbb{Q}$ met $r \geq 0$ een verzameling A_r zoals in eigenschap 5. We kunnen $A_0 = \varnothing$ kiezen.
(2) We tonen aan dat $\mu(A_r \setminus A_q) = 0$ als $r < q$. [...]
(3) We mogen zelfs aannemen dat de familie $(A_q)_{q \in \mathbb{Q}, q \geq 0}$ stijgend is. [...].
(4) We definiëren voor elke $n \in \mathbb{N}$ als volgt een benadering s_n van f:
$s_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{A_{\frac{k}{2^n}} \setminus A_{\frac{k-1}{2^n}}}$.
(5) We tonen aan dat de rij $(s_n)_n$ stijgend is. [...]
(6) Bijgevolg bestaat $f(x) := \lim_{n\to\infty} s_n(x) \in [0, +\infty]$ voor elke $x \in X$. Uit de eigenschappen van meetbare afbeeldingen volgt dat f meetbaar is [1]. Door de monotone convergentie-stelling is ook $\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E s_n\, d\mu$ voor elke $E \in \mathcal{A}$.
(7) We tonen aan dat $\int_E f\, d\mu = \nu(E)$ voor elke $E \in \mathcal{A}$ (daaruit volgt dan ook dat $\int_X f\, d\mu = \nu(X) < +\infty$, zodat f μ-integreerbaar is). Gebruik makend van lemma 4(1) vinden we voor $E \in \mathcal{A}$ [...] $\nu(E \cap A_n) - \frac{\mu(X)}{2^n} \leq \int_E s_n\, d\mu \leq \nu(E \cap A_n)$.
Het volstaat dus aan te tonen dat $\lim_{n\to\infty} \nu(E \cap A_n) = \nu(E)$. Vermits $(A_n)_n$ stijgend is, is dit equivalent met $\nu(E \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \nu(E)$, of nog, met $\nu(E \setminus \bigcup_n A_n) = 0$. Omdat $\nu \ll \mu$ volstaat het aan te tonen dat $\mu(E \setminus \bigcup_n A_n) = 0$, of nog (omdat ... [2]) dat $\mu(X \setminus \bigcup_n A_n) = 0$. Wegens lemma 4 is nu $\nu(X) \geq \nu(X \setminus \bigcup_n A_n) \geq n\mu(X \setminus \bigcup_n A_n)$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Omdat $\nu(X) < +\infty$ volgt hieruit dat $\mu(X \setminus \bigcup_n A_n) = 0$ [3].
(8) [...]
(9) Veronderstel nu dat ook $g\colon X \to [0, +\infty[$ μ-integreerbaar is met $\nu(E) = \int_E g\, d\mu$ voor elke $E \in \mathcal{A}$. Dan is $\int_E (f - g)\, d\mu = \nu(E) - \nu(E) = 0$ voor elke $E \in \mathcal{A}$, zodat $f = g$ μ-b.o. wegens de annihilatie-eigenschap. Omdat $\nu \ll \mu$, is ook $f = g$ ν-b.o [4]. □

Stelling 7. *Zij ν, μ σ-eindige maten op een σ-algebra $\mathcal{A}$ met μ volledig en met $\nu \ll \mu$. Dan bestaat een meetbare afbeelding $f\colon X \to [0, +\infty[$ zo dat $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$ voor elke $E \in \mathcal{A}$. Elke twee afbeeldingen met deze eigenschap zijn μ-b.o. en ν-b.o. gelijk.*

Bewijs. Door het gegeven is $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ met $(Y_n)_n$, $(Z_n)_n$ stijgend, en $\mu(Y_n) < +\infty$ en $\nu(Z_n) < +\infty$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Dan is $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \cap Z_n$ met $\mu(Y_n \cap Z_n) < +\infty$ en $\nu(Y_n \cap Z_n) < +\infty$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Dan vinden we ook X_n met $X = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\mu(X_n) < +\infty$ en $\nu(X_n) < +\infty$. Als deelruimte zijn ν, μ eindige maten op de deelruimten X_n met μ volledig en $\nu \ll \mu$ op X_n [5]. Door de voorgaande stelling bestaan dus meetbare afbeeldingen $f_n\colon X_n \to [0, +\infty[$ met $\nu(E) = \int_E f_n\, d\mu$ voor elke $E \in \mathcal{A}$, $E \subseteq X_n$. Definieer dan $f(x) := f_n(x)$, voor elke $x \in X_n$. M.a.w., $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n 1_{X_n}$. Elke $f_n 1_{X_n} : X \to [0, +\infty[$ is meetbaar, zodat ook f meetbaar is [6]. Door monotone convergentie is voor elke $E \in \mathcal{A}$

$$\int_E f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f 1_{X_n}\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E\cap X_n} f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E \cap X_n) = \nu(E).$$

Zij nu ook $g\colon X \to [0, +\infty[$ μ-meetbaar met $\nu(E) = \int_E g\, d\mu$ voor elke $E \in \mathcal{A}$. Door de voorgaande stelling is dan $f_{|X_n} = g_{|X_n}$ μ-b.o. en ν-b.o. voor elke $n \in \mathbb{N}$, zodat ook $f = g$ μ-b.o. en ν-b.o [7]. □

[1, 3-4, 6-7] Verklaar.
[2] Vul in.
[5] Geef de definitie van 'ν is absoluut continu t.o.v. μ' en verklaar.

Oefeningenexamen Wiskundige Analyse III

27 januari 2012

- De oefeningen staan op 7/20 punten van het examen.
- Het enige dat toegelaten is op het examen zijn: de cursussen WAI-II-III en eigen notities. Niet toegelaten zijn dus onder andere: andere cursussen, boeken of print-outs van het internet.

VEEL SUCCES!

Vraag 1:
Gegeven zij deze stelling met bewijs:

0.1 Stelling. *Zij μ de Lebesgue-maat. Zij $A \subseteq]0,1[$ een Lebesgue-meetbare verzameling en $c > 0$ een positief reëel getal. Neem aan dat geldt: $\forall a \forall b [0 \leq a < b \leq 1 \Rightarrow \mu(A \cap]a,b[) \geq c(b-a)]$. Toon aan dat $\mu(A) = 1$.*

Bewijs. Indien we $a = 0$ en $b = 1$ nemen, verkrijgen we dat $c \leq \mu(A) \leq 1$. Indien $c = 1$ is het bewijs voltooid. Neem aan dat $c < 1$. Kies willekeurige $0 \leq a < b \leq 1$. Dan is **(1)** $\mu(A^c \cap]a,b[) \leq (1-c)(b-a)$.
Kies een willekeurige $\varepsilon > 0$. Er bestaan **(2)** intervallen $I_n \subseteq [0,1]$ zodat $A^c \cap [0,1] \subseteq \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ en $\varepsilon + \mu(A^c \cap [0,1]) > \sum_{n \in \mathbb{N}} v(I_n)$. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} \varepsilon + \mu(A^c \cap [0,1]) &> \sum_{n \in \mathbb{N}} v(I_n) \\ &\overset{\textbf{(3)}}{\geq} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{1-c} \mu(A^c \cap I_n) \\ &\overset{\textbf{(4)}}{=} \frac{1}{1-c} \mu(A^c \cap [0,1]). \end{aligned}$$

Omdat ε willekeurig was, is

$$\mu(A^c \cap [0,1]) \geq \frac{1}{1-c} \mu(A^c \cap [0,1]).$$

Hieruit volgt **(5)** dat $\mu(A) = 1$. $\square$

Examen Analyse III

1. Toon aan:

   Stelling 1. *Zij $\overline{\mu}$ de uitwendige Lebesgue-maat. Voor $A \subseteq \mathbb{R}^d$ zijn equivalent:*

   (a) A is Lebesgue-meetbaar

   (b) Voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat een open $V \supseteq A$ met $\overline{\mu}(V \setminus A) \leq \varepsilon$

   (c) $A = G \setminus N$, met G een G_δ-verzameling en N een Lebesgue-nulverzameling.

   Je mag hierbij (zonder bewijs) gebruiken dat $\overline{\mu}(A) = \inf\{\mu(V) : A \subseteq V,\ V \text{ open}\}$.

2. Toon aan:

   Stelling 2. *Zij $\mu(X) < +\infty$. Zij $(f_n)_n$ een rij van meetbare afbeeldingen $X \to \mathbb{R}$ en f een afbeelding $X \to \mathbb{R}$. Als $f_n \to f$ b.o., dan is $f_n \to f$ bijna gelijkmatig.*

   Je mag hierbij (zonder bewijs) gebruik maken van het volgende lemma:

   Lemma 3. *Zij $(f_n)_n$ een rij van afbeeldingen $X \to \mathbb{R}$ en f een afbeelding $X \to \mathbb{R}$. Dan is $f_n \to f$ bijna gelijkmatig als en slechts als*

   $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists E \in \mathcal{A} \text{ met } \mu(E^c) \leq \varepsilon)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall x \in E)(|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

3. Beantwoord de vragen:

   Stelling 4. *Zij f een meetbare afbeelding $X \to [0, +\infty]$ met $\overline{\int}_X f < +\infty$. Dan is f integreerbaar.*

   Bewijs. (1) Zij eerst $\mu(X) < +\infty$`[1]` en f begrensd. Dan bestaat $N \in \mathbb{N}$ met $f \leq N$ op X. Zij willekeurig $M \in \mathbb{N}$. Stel $E_l := \{l/M \leq f < (l+1)/M\}$ voor $l = 0, \ldots, MN$. Dan zijn de E_l meetbaar. Omdat $\bigsqcup_{l=0}^{MN} E_l = X$`[2]` is $\pi := \{E_l : 0 \leq l \leq MN\}$ een meetbare partitie met `[3]`

   $$S_\pi(f) - s_\pi(f) = \sum_{E \in \pi} (\sup_E f - \inf_E f)\mu(E) \overset{[4]}{\leq} \frac{1}{M} \sum_{E \in \pi} \mu(E) = \frac{\mu(X)}{M}.$$

   (2) We behandelen nu het algemene geval. Zij $\varepsilon > 0$. Wegens een voorafgaand lemma bestaat $E \subseteq X$ met $\mu(E) < +\infty$, $\overline{\int}_{E^c} f \leq \varepsilon$ en f begrensd op E. Wegens deel 1 vinden we een meetbare partitie π van E met $S_\pi(f) - s_\pi(f) \leq \varepsilon$. Kies een meetbare partitie π' van E^c met $S_{\pi'}(f) \leq \overline{\int}_{E^c} f + \varepsilon \leq 2\varepsilon$ `[5]`. Dan is $S_{\pi'}(f) - s_{\pi'}(f) \leq S_{\pi'}(f) \leq 2\varepsilon$. Er volgt dat $\pi \cup \pi'$ een meetbare partitie is van X met $S_{\pi\cup\pi'}(f) - s_{\pi\cup\pi'}(f) \leq 3\varepsilon$. $\square$

   `[1]`: waarom is het nodig om $\mu(X) < +\infty$ apart te behandelen (m.a.w., wat gaat er mis in het bewijs van deel (1) als we dit niet zouden vragen)?
   `[2,4]`: verklaar.
   `[3]`: treden er in $\sum_{E\in\pi}(\sup_E f - \inf_E f)\mu(E)$ geen onbepaaldheden $\pm\infty \mp \infty$ op? Convergeert de reeks wel?
   `[5]`: waarom kunnen we steeds een partitie π' met deze eigenschap vinden?

4. Beantwoord de vragen (Z.O.Z.):

   Lemma 5. *Zij $P \subseteq \mathbb{R}^2$ een parallellogram opgespannen door p_1, p_2 en zij $r > 0$. Als $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : (\exists y \in P)(\|x - y\| \leq r)\}$, dan is $\overline{\mu}(A) \leq \mu(P) + 4r(\|p_1\| + \|p_2\| + 4r)$.*

Oefeningenexamen Wiskundige Analyse III

20 augustus 2012

- De oefeningen staan op 7/20 punten van het examen.
- Het enige dat toegelaten is op het examen zijn: de cursussen WAI-II-III en eigen notities. Niet toegelaten zijn dus onder andere: andere cursussen, boeken of print-outs van het internet.

VEEL SUCCES!

9,5

Vraag 1: 2,5

Zij X een verzameling en $\overline{\mu}$ een uitwendige maat op X. $\overline{\mu}$ wordt **regulier** genoemd indien voor elke $A \subseteq X$ er een $\overline{\mu}$-meetbare verzameling B bestaat zodanig dat $A \subseteq B$ en $\overline{\mu}(A) = \overline{\mu}(B)$.

Gegeven zij nu deze stelling met bewijs:

0.1 Stelling. *Zij $\overline{\mu}$ een reguliere uitwendige maat op X en stel dat $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq X$ een stijgende rij is van deelverzamelingen in X. Dan is*

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \overline{\mu}(A_n).$$

Bewijs. Omdat $\overline{\mu}$ regulier is, bestaan er $\overline{\mu}$-meetbare verzamelingen B_n zodanig dat $A_n \subseteq B_n$ en $\overline{\mu}(A_n) = \overline{\mu}(B_n)$ voor elke n. Definieer $C_k = \bigcap_{n\geq k} B_n$. Dan is $A_k \subseteq C_k$ **(1)**, $\overline{\mu}(A_k) = \overline{\mu}(C_k)$ **(2)** en C_k is $\overline{\mu}$-meetbaar **(3)**. Hieruit volgt dat

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{\mu}(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \overline{\mu}(C_n) \overset{(4)}{=} \overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n\right) \geq \overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right).$$

Ook is **(5)**

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{\mu}(A_n) \leq \overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right).$$

$\square$