Oefeningen Algebra II

donderdag 2 februari 2012 – derde bachelor wiskunde

`Vermeld duidelijk je naam.`

1. Zij K een veld van karakteristiek niet gelijk aan 2 of 3. Zij $f(x), g(x) \in K[x]$ irreducibele veeltermen met $\deg f(x) = 2$, $\deg g(x) = 3$ en de discriminant D van g geen kwadraat in K. Zij α een wortel van f en β een wortel van g. Stel verder dat $K(\sqrt{D}) \neq K(\alpha)$.

   (i) Zij L het splijtveld van $f(x)g(x)$. Bewijs dat $[L : K] = 12$.

   (ii) Stel $\gamma = \alpha + \beta$. Bewijs dat $[K(\gamma) : K] = 6$.

   (iii) Bewijs dat $\mathrm{Gal}(L/K)$ een Sylow 3-deelgroep P bevat die een normaaldeler is in $\mathrm{Gal}(L/K)$, maar geen Sylow 2-deelgroep die een normaaldeler is in $\mathrm{Gal}(L/K)$.

2. Zij K een veld met $\mathrm{kar}\, K = p$, p een priemgetal.

   (i) Onderstel dat elk element van K een p-de macht is. Bewijs dat elke eindige uitbreiding van K separabel is.

   (ii) Zij α algebraïsch over K. Bewijs dat α separabel is over K als en slechts als $K(\alpha) = K(\alpha^{p^n})$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

3. Zij K een veld met $\mathrm{kar}\, K = 0$.

   (i) Zij L/K Galois, p een priemgetal dat $[L : K]$ deelt. Bewijs dat er een velduitbreiding E bestaat, $K \subset E \subset L$ zodat $[L : E]$ een macht is van p, en $[E : K]$ niet deelbaar is door p.

   (ii) Onderstel dat voor elke echte eindige velduitbreiding E/K geldt dat $[E : K]$ deelbaar is door p. Bewijs dat $[E : K]$ een macht is van p.

4. Zij K een veld van karakteristiek 0. Zij $f(x)$ een irreducibele veelterm van graad 4 in $K[x]$. Zij L het splijtveld van f over K, en $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ de wortels van f in L. Onderstel dat de discriminant D van f geen kwadraat is in K, maar dat de kubische resolvente van f een wortel $\theta = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4)$ in K heeft.

   (i) Toon aan dat $\mathrm{Gal}(L/K)$ een deelgroep is van $\mathbf{D}_8$ in $\mathbf{S}_4$.

   (ii) Stel $\gamma = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4$. Beschrijf de actie van $\mathbf{D}_8$ op γ.

   (iii) Bewijs dat $\gamma^2 \in K$.

   (iv) Stel $\delta = \sqrt{D}$. Onderstel dat $\gamma \neq 0$ en $G = \mathbf{C}_4$. Bewijs dat $\delta\gamma$ een kwadraat is in K.

   (v) Onderstel dat $K = \mathbb{Q}$. Zijn de wortels van f construeerbaar met passer en liniaal?