Examen Kwantummechanica 1: 16 januari 2012

THEORIE

ANTWOORD BONDIG EN GEVAT !

1. VRAAG 1 (10 PUNTEN)

Deel 1: We beschouwen golffuncties van het type

$$\Psi(x,t) = \sum_n c_n \psi_n(x) \exp -\frac{i}{\hbar} E_n t \, ,$$

met $\psi_n(x)$ de eigenfuncties van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking voor een harmonische oscillator

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 \, .$$

- Toon aan dat de golffunctie $\Psi(x,t)$ wel degelijk een oplossing is van de tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking.
- Toon aan dat voor een deeltje dat beschreven wordt door de bovenstaande golffunctie $\Psi(x,t)$, de verwachtingswaarde $\langle H \rangle$ onafhankelijk is van de tijd.
- Bereken de grootheid $(\Delta E)^2$ voor een deeltje dat beschreven wordt door de bovenstaande golffunctie $\Psi(x,t)$.
- Beschouw een niet nader bepaalde dynamische variabele A en bereken $\langle A \rangle$ voor een deeltje dat beschreven wordt door de bovenstaande golffunctie $\Psi(x,t)$. Bespreek de tijdsafhankelijkheid van $\langle A \rangle$.
- Bepaal de periode T waarvoor $\Psi(x, t = T) = \Psi(x, t = 0)$.

Deel 2: Men construeert een golfpakket van de vorm

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp_x \quad \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left[p_x x - E(p_x)t\right]\right] \phi(p_x)$$

met $\phi(p_x)$ een functie die scherp gepiekt is rond $p_x = p_0$.

Toon aan dat voor kleine tijdstippen t het golfpakket kan geschreven worden als het product VAN een vlakke golf voor een deeltje met impuls p_0 en energie $E(p_0)$ MET een enveloppe-functie $F(x,t)$ waarvoor $F(x, t = 0) = F(x + v_g t, t)$. De groepssnelheid wordt gedefinieerd door $v_g = \left[\frac{dE(p_x)}{dp_x}\right]_{p_x = p_0}$.
Leg uit waarom het concept groepssnelheid het dichtst in de buurt komt van het klassieke concept "snelheid".

2. VRAAG 2 (20 PUNTEN) *MONDELING EXAMEN*

Examen Kwantummechanica I: 16 januari 2012

OEFENINGEN

BIJ HET OPLOSSEN VAN HET OEFENINGENGEDEELTE MOGEN ENKEL DE CURSUSNOTA'S (TRANSPARANTEN) EN HET HANDBOEK "QUANTUM MECHANICS" VAN BRANSDEN EN JOACHAIN GEBRUIKT WORDEN.

OEFENING 1 (10 PUNTEN)

Beschouw een deeltje met massa m dat beweegt in één dimensie onder de invloed van een potentiaal van het type

$$\begin{aligned} V(x) &= +\infty \qquad x \in \,]-\infty, a[\\ V(x) &= 0 \qquad x \in [a, 2a] \\ V(x) &= +\infty \qquad x \in \,]2a, +\infty[\;. \end{aligned}$$

Het deeltje wordt in een toestand gebracht beschreven door de golffunctie

$$\Psi\left(x, t=0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(x) \;,$$

met $\psi_1(x)$ ($\psi_2(x)$) de golffunctie horend bij de grondtoestand (eerste aangeslagen toestand).

1. Maak een schets van $\Psi\left(x, t=0\right)$ als functie van x.
2. Bepaal de positie waarschijnlijkheidsdichtheid $P(x, t)$ van het deeltje.
3. Op een tijdstip t oefent men een meting uit om het deeltje te localiseren. Toon aan dat de positie(s) waarop men de grootste kans heeft om het deeltje aan te treffen gegeven worden door de oplossingen van de vergelijking
$$\psi_1(x)\frac{d\psi_1(x)}{dx} + \psi_2(x)\frac{d\psi_2(x)}{dx} + \cos\left(\frac{3E_1 t}{\hbar}\right)\frac{d\left(\psi_1(x)\psi_2(x)\right)}{dx} = 0 \;.$$
Aan welke vergelijking voldoen de posities waarop men de MINSTE kans heeft om het deeltje aan te treffen?
4. Bereken $\langle H\rangle$ en $\langle p_x^2\rangle$ voor het deeltje.
5. Bereken de waarschijnlijkheidsstroomdichtheid $j(x, t)$ voor het deeltje en toon aan dat $j(x, t)$ voldoet aan de continuïteitsvergelijking.

OEFENING 2 (4 PUNTEN)

Bewijs de volgende identiteit

$$e^{cA}Be^{-cA} = B + c[A, B] + \frac{c^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots ,$$

waarbij c een reëel getal is en A, B operatoren zijn die horen bij niet nader bepaalde dynamische variabelen. Vervolledig de bovenstaande uitdrukking en **BEREKEN** ook de coëfficiënt die hoort bij de term in c^3.

OEFENING 3 (6 PUNTEN)

De onderstaande figuur toont 6 golffuncties $(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_6(x))$ die oplossingen zijn van de één-dimensionale TISE. Je wordt gevraagd om voor elke u_i de corresponderende potentiaal te selecteren uit de zes getekende potentialen $(V_1(x), V_2(x), \ldots, V_6(x))$. **Je wordt ook verwacht om je keuzes te verantwoorden en telkens te vermelden of je te doen hebt met een gebonden toestand of een verstrooiingstoestand**. De spelregels zijn de volgende

1. de index n in $u_n(x)$ slaat hier NIET op de grondtoestand, eerste aangeslagen toestand, etc., maar is een dummy.
2. het is NIET zo dat je elke potentiaal maar één keer moet vermelden. Het is best mogelijk dat een welbepaalde potentiaal V_i aanleiding gaf tot verschillende golffuncties u_i (of anders gezegd, het is best mogelijk dat van bepaalde potentialen geen golffunctie u_i wordt getoond).