Lineaire Algebra & Analytische Meetkunde II

Eerste Bachelor Wiskunde

Koen Thas — Bert Seghers

14 juni 2012, 8:30

1. Beschouw een unitaire ruimte $\mathscr{U}_n = (\mathbf{PG}(n,\mathbb{C}), f)$, $n \in \mathbb{N}^\times$.

   (a) Toon aan dat een isometrie van $\mathscr{U}_n$ tevens een unitaire lineaire transformatie is van $\mathscr{U}_n$, en omgekeerd.

   (b) Voor een unitaire lineaire transformatie Φ van $\mathscr{U}_n$ is er steeds een orthonormale basis van eigenvectoren. Bewijs dit.

   (c) Onderstel nu dat Φ en Φ' unitaire lineaire transformaties zijn van $\mathscr{U}_n$ waarvoor $\Phi \circ \Phi' = \Phi' \circ \Phi$. Bewijs dat er een orthonormale basis is die bestaat uit eigenvectoren voor zowel Φ als Φ'.

2. Geef van de vier uitspraken hieronder aan of ze waar of vals zijn. Indien nodig, maak onderscheid tussen gevallen ($n \in \mathbb{N}^\times, \mathbb{K}$ een veld). Indien waar, bewijs. Indien vals, geef een tegenvoorbeeld.

   (a) Voor een bilineaire vorm f op $V(n,\mathbb{K})$ geldt: $n = \dim \operatorname{rad} V + \operatorname{rang} f$.

   (b) De symmetrische, niet-singuliere matrices vormen een deelgroep van $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$.

   (c) In de vectorruimte $\operatorname{Bil}(\mathbb{K}^n)$ vormen de reflexieve bilineaire vormen een deelruimte.

   (d) Het stel barycentrische coördinaten van een punt ten opzichte van een affien onafhankelijke verzameling punten, is onafhankelijk van de keuze van een referentiepunt o.

3. De groep van inverteerbare affiene afbeeldingen van een affiene ruimte $\mathbf{AG}(n,\mathbb{K})$ wordt genoteerd met $\mathbf{AGL}(n,\mathbb{K})$.

   (a) Wat is een affiene afbeelding precies?

   (b) Hoe ziet een element van $\mathbf{AGL}(n,\mathbb{K})$ eruit ten opzichte van een vast affien referentiesysteem?

   (c) Gebruik het antwoord op (b) om het aantal elementen van $\mathbf{AGL}(n,q)$ te bepalen.

   (d) Hoeveel elementen van $\mathbf{AGL}(n,q)$ fixeren een vast hypervlak van $\mathbf{AG}(n,q)$ puntsgewijs?

   (e) Vormen deze een deelgroep van $\mathbf{AGL}(n,q)$? Waarom?

   Je mag aannemen dat $\mathbf{AGL}(n,q)$ transitief werkt op de hypervlakken.

4. (a) Definieer de notie *congruentie* voor kwadratische vormen. Wanneer zijn twee kwadratische vormen over $\mathbb{R}$ congruent? Formuleer de stelling – niets bewijzen.

   Zij $\mathscr{Q}$ de collectie van alle kwadratische vormen op $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, de vectorruimte over $\mathbb{R}$ van reële 2×2-matrices.

   (b) Hoeveel congruentieklassen zijn er in $\mathscr{Q}$? Leg uit.

   (c) De determinantafbeelding $\det\colon \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ is zo'n kwadratische vorm uit $\mathscr{Q}$ (niet bewijzen). In welke congruentieklasse zit $\det$?

   (d) Zij $q \in \mathscr{Q}$ een niet-ontaarde kwadratische vorm en $T = \left(\begin{smallmatrix} r & s \\ t & u \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. Toon aan dat de afbeelding $\widetilde{q}\colon \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : A \mapsto q(TA)$ een niet-ontaarde kwadratische vorm is als en slechts als $\det T \neq 0$.

5. Wat zijn de mogelijke onderlinge liggingen van twee disjuncte solids in $\mathbf{AG}(7, q)$? Hoeveel vierdimensionale affiene deelruimten gaan er door de ene, die disjunct zijn van de andere (in elk van de gevallen)?

In het rijk van de geest is een methode
te vergelijken met een kruk.
De ware denker loopt vrij.

— Godfried Bomans —