Examen Wiskundige Logica
Academiejaar 2011-2012

Oefening 1. We noemen een groep G een torsiegroep indien er voor elke $g \in G$ een $n > 0$ bestaat met $g^n = 1$. Zij φ een zin die in elke torsiegroep waar is. Bewijs dat er een groep G met $G \models \varphi$ bestaat, die geen torsiegroep is. (5 punten)

Oefening 2. Beschouw een verzameling X en een oneindige verzameling van deelverzamelingen $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{P}(X)$. Definieer

$$\mathcal{F} = \{f : X \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} | \exists A \in \mathcal{A} : f(x) \neq 0 \to x \in A\}.$$

Bereken $|\mathcal{F}|$ (al dan niet volgens de methode hieronder geschetst)
Stap 1: Geef voorbeelden van functies aan om te tonen dat $|\mathcal{F}| \geq |\mathcal{A}|$ en dat $|\mathcal{F}| \geq 2^{|A|}$ voor elke $A \in \mathcal{A}$. (2 punten)
Stap 2: Neem aan dat $\lambda \geq 2^{|A|}$ voor elke $A \in \mathcal{A}$. Toon dat $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{A}| \cdot \lambda$. (2punten)
Stap 3: Toon aan dat $|\mathcal{F}| = |\mathcal{A}| + \sup_{A \in \mathcal{A}} 2^{|A|}$. (1 punt)
Je mag aannemen dat het keuzeaxioma geldt. Neem ook aan dat het supremum van kardinaalgetallen bestaat en de te verwachten eigenschappen bezit.

Oefening 3. Een partitie $\vec{x}$ van een natuurlijk getal n is een tupel $(x_1, \ldots, x_k)$ met $x_1 \geq x_2 \cdots \geq x_k \geq 1$, en $x_1 + \cdots + x_k = n$. We schrijven dan $|\vec{x}| = n$. Zij $\mathcal{P}$ de verzameling van partitities van natuurlijke getallen. Neem aan dat $\prec$ een totale ordening op $\mathcal{P}$ is met $|\vec{x}| < |\vec{y}| \to \vec{x} \prec \vec{y}$. Bewijs dat $\prec$ dan ook een goede ordening is. (5 punten)

Oefening 4. We noemen een veld K algebraïsch gesloten indien voor elke n-degraadspolynoom met coëfficienten in K n wortels bestaan in K. Zij k een veld, en F een algebraisch gesloten velduitbreiding van k. Toon dat er een veld K is met $k \leq K \leq F$, zodat K algebraisch gesloten is en minimaal met deze eigenschappen. (5 punten)

Oefening 5. Definieer een *term* op de volgende manier:

(1) Elk geheel getal is een term;
(2) Als t_1, t_2 termen zijn, dan zijn ook $(t_1 + t_2)$, $(t_1 \cdot t_2)$ termen.

De verzameling van termen is de kleinste verzameling met deze twee eigenschappen. Let op! Deze termen zijn louter strings symbolen, de $+$ en $\cdot$ hebben enkel symbolische betekenis. Met andere woorden $(1 + 3) \neq (2 + 2)$, $(1 \cdot 5) \neq (5 \cdot 1)$, enzovoorts.

(1) Toon aan dat in elke term het aantal open haakjes gelijk is aan het aantal gesloten haakjes. (3 punten)
(2) Twee haakjes (en) vormen een paar, als ze in de zelfde stap ingevoerd worden. Toon aan dat twee haakjes een paar vormen als en slechts als het gesloten haakje het eerste gesloten haakje na het open haakje is met de eigenschap dat ertussen even veel open als gesloten haakjes staan. (3 punten)
(3) Toon aan dat elke term op een unieke manier uit twee deeltermen kan opgebouwd worden. (3 punten)

(4) Waarom is (3) belangrijk voor het programmeren van een zakrekenmachine? (1 punt)

Oefening 6. Zij $L = \{\sim\}$, waar $\sim$ een binaire relatie is. Zij T de theorie die de axioma's van een equivalentierelatie bevat, en ook *voor elke* n volgende twee axioma's

$$\exists x_1, x_2, \dots, x_n : \neg(x_1 \sim x_2) \wedge \neg(x_1 \sim x_3) \wedge \cdots \wedge \neg(x_{n-1} \sim x_n)$$

en

$$\forall x \exists y_1, \dots, y_n : (x \sim y_1) \wedge \cdots \wedge (x \sim y_n) \wedge (y_1 \neq y_2) \wedge \dots (y_{n-1} \neq y_n).$$

(1) Geef een korte beschrijving van de modellen van deze axiomas! (2 punten)
(2) Toon aan dat deze theorie kwantoreliminatie heeft. (4 punten)
(3) Toon aan dat er verschillende niet-isomorfe modellen van kardinaliteit κ bestaan wanneer κ overaftelbaar is, maar slechts één model van kardinaliteit $|\mathbb{N}|$. (4 punten)

Tijd: 3 uren.