Academiejaar 2011-2012, 16 januari 2012, 08.30u

Redeneren, Abstraheren en Formuleren

- Schrijf je naam bovenaan elk antwoordblad. Schrijf niet met potlood of in het rood op je antwoordbladen.
- Los elke (deel)vraag afzonderlijk op. Vermeld duidelijk het nummer van de (deel)vraag bij elk antwoord. Indien je een (deel)vraag niet beantwoordt, vermeld dan ook duidelijk het nummer van deze (deel)vraag samen met de melding "geen antwoord".
- Geef zowel je antwoordbladen als de opgave af. Kladpapier mag je houden.

---

1. Is onderstaande gevolgtrekking geldig of niet? Staaf je antwoord met een calculationeel bewijs of een tegenvoorbeeld.

   Als de initialisatie correct is en de lus eindigt, dan is de veranderlijke `jaartal` gelijk aan 2012. De veranderlijke `jaartal` is gelijk aan 2012. Dus, als de initialisatie correct is, dan eindigt de lus.

2. (a) In de cursus hebben we een Haskell-functie `sum` gezien die de elementen van een lijst van gehele getallen optelt:

   ```
   (0) sum :: [Int] -> Int
   (1) sum [] = 0
   (2) sum (x:xs) = x + sum xs
   ```

   Schrijf zelf een Haskell-functie `sumtree` die op gelijkaardige wijze de elementen van een boom van het datatype `Tree` optelt, met `Tree` zoals in de cursus gedefinieerd als

   ```
   data Tree = Nil | Node Int Tree Tree
   ```

   (b) Een alternatieve manier om de som van alle elementen van een boom te bekomen, is om de boom eerst om te zetten naar een lijst en vervolgens alle elementen van die lijst op te tellen. Schrijf hiertoe zelf een Haskell-functie `flatten` die een boom van het type `Tree` omzet naar een lijst met dezelfde elementen, en toon vervolgens aan dat voor elke eindige boom t geldt dat $\mathit{sumtree}\ t = \mathit{sum}(\mathit{flatten}\ t)$.

3. In het hoofdstuk over inductie en recursie hebben we gebruik gemaakt van het feit dat in een totaal geordende verzameling $(X, \preceq)$ de begrippen "minimaal element" en "kleinste element" van een deelverzameling A van X samenvallen. De volgende vragen houden verband met dit interessante fenomeen.

   (a) Beschouw de poset $(\mathbb{N}, \leq)$ en $A = \{16, 1, 2012\}$. Heeft A kleinste elementen? Heeft A minimale elementen? Indien ja, welke?

   (b) Beschouw de poset $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$. Kan je een deelverzameling A van $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ vinden die wel een minimaal element heeft maar geen kleinste element? Leg uit.

   (c) Zij $(X, \preceq)$ een poset en A een deelverzameling van X. Toon de volgende bewering aan: "Als A een kleinste element heeft dan is dit ook een minimaal element van A en dan heeft A bovendien geen andere minimale elementen."

(d) Zij $(X, \preceq)$ een poset en A een deelverzameling van X. Beschouw de bewering: "Als $\preceq$ een totale orderelatie is en b een minimaal element van A, dan is b het kleinste element van A." Noem 4 verschillende bewijsmethoden die worden toegepast in het volgende bewijs, en duid m.b.v. nummers op dit opgaveblad aan waar ze worden toegepast:

> Bewijs: stel dat $\preceq$ een totale orderelatie is en b een minimaal element van A. Zij x een willekeurig element van A. Indien $x = b$ dan hebben we wegens de reflexiviteit van $\preceq$ dat $b \preceq x$. Stel dus dat $x \neq b$. Aangezien $\preceq$ een totale orderelatie is, geldt dat $x \preceq b$ of $b \preceq x$. Maar $x \preceq b$ kan niet gelden want uit $x \preceq b$ en de veronderstelling dat $x \neq b$ zou volgen dat b niet minimaal is. Dus moet $b \preceq x$ gelden. Aangezien bovenstaande redenering geldt voor een willekeurige x kunnen we hieruit besluiten dat $\forall x \in A \,.\, b \preceq x$, dus b is het kleinste element van A.

4. Beschouw het volgende programma S dat als input een positief geheel getal n neemt:

```
i := 0
s := 0
while i < n do
    i := i + 1
    s := s + (2*i -1)
```

(a) Bewijs dat $0 \leq i \leq n \wedge s = i^2$ een invariant is voor de lus in het programma.

(b) Toon aan dat het programma n^2 berekent, m.a.w. dat $\{0 \leq n\}\, S\, \{s = n^2\}$ een geldig Hoare-triplet is. Wees volledig.

5. Een verstrooide docent heeft onderstaand "bewijs" door inductie neergeschreven waaruit zou moeten blijken dat alle schapen roos zijn. Waarom is dit bewijs verkeerd? Geef in je antwoord duidelijk aan wat er misloopt in het bewijs, en op welke plaats.

> Bewijs: we leveren een bewijs door inductie voor $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, P(n)$ met
>
> $P(n)$: in elke verzameling van n schapen zijn alle schapen roos
>
> **Inductiebasis** Beschouw een verzameling van 0 schapen. Aangezien deze verzameling leeg is, is elk schaap dat er in zit roos. De bewering $\forall x \in \emptyset \,.\, Q(x)$ is immers steeds waar, voor gelijk welk predikaat $Q(x)$.
>
> **Inductiestap** Zij k een willekeurig natuurlijk getal. Stel dat $P(k)$ geldt, m.a.w. in elke verzameling van k schapen zijn alle schapen roos. We bewijzen dan dat $P(k+1)$ geldt, m.a.w. dat in elke verzameling van $k+1$ schapen alle schapen roos zijn. Stel hiertoe dat A een verzameling van $k+1$ schapen is, dan kunnen we A schrijven als $A = B \cup \{a\}$ met B een verzameling van k schapen en a een schaap waarvoor $a \notin B$. Wegens de inductiehypothese zijn alle schapen in B roos. Voeg nu a terug bij B maar neem een ander schaap b weg, t.t.z. beschouw $A = C \cup \{b\}$ met $C = (B \cup \{a\}) \setminus \{b\}$. Dan is C een verzameling van k schapen. Wegens de inductiehypothese zijn alle schapen in C dus roos. Aangezien $A = B \cup C$ zijn alle schapen in A dus roos. Hieruit volgt het gestelde.

Veel succes!