Wetenschappelijk Rekenen

Examen - Derde bachelor informatica

Oefeningen – 30 mei 2012

1. Gegeven is het beginwaardeprobleem

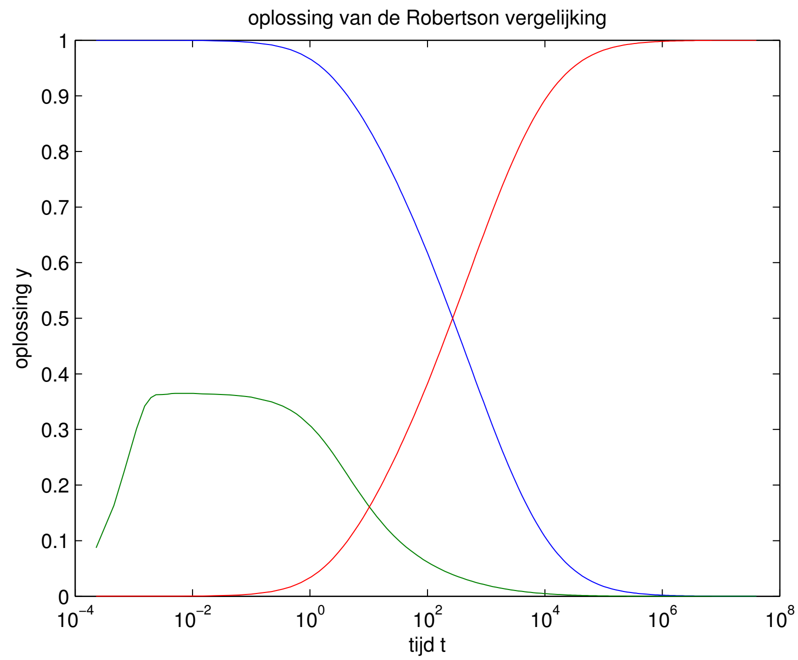
$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,04y_1 + 10000y_2y_3 \\ 0,04y_1 - 10000y_2y_3 - 3\times 10^7 y_2^2 \\ 3\times 10^7 y_2^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los dit probleem zo efficiënt mogelijk op. Het integratie-interval loopt van $t = 0$ tot $t = 4 \times 10^7$. Je kan beginnen met de solver `ode45`. Beschrijf de problemen die je ervaart, wat de oorzaak is van de problemen en hoe je tot een efficiëntere oplossing komt. Zorg dat je ook een semi-log plot maakt van de oplossing van deze differentiaalvergelijking waarbij je de 3 componenten goed kan zien.

Oplossing: We kunnen eenvoudig de code van `vdpode.m`, die je op Minerva kan vinden, aanpassen. We stellen echter vast dat de solver `ode45` veel tijd nodig heeft om tot een oplossing te komen. dit komt omdat dit beginwaardeprobleem, die de Robertson vergelijking genoemd wordt, een stijf probleem is. We hebben dus een solver nodig die stabieler is over een groter interval. Een mogelijk alternatief in MATLAB is het gebruik van de `ode15s` solver. Merk wel op dat deze solver, in tegenstelling tot `ode45`, een Jacobiaan nodig heeft om snel tot een stabiele oplossing te convergeren. De volledige code wordt:

```
function robertson

  tspan = [0; 4e7];
  y0 = [1; 0; 0];
  options = odeset('Jacobian',@J);

  [t,y] = ode15s(@f,tspan,y0,options);

  y(:,2) = 1e4*y(:,2); % zichtbaar maken tweede oplossingscomponent

  figure;
  semilogx(t,y);
  title('oplossing van de Robertson vergelijking');
  xlabel('tijd t');
  ylabel('oplossing y');

  function dydt = f(t,y)
    dydt = [ (-0.04*y(1) + 1e4*y(2)*y(3))
             (0.04*y(1) - 1e4*y(2)*y(3) - 3e7*y(2)^2)
             3e7*y(2)^2 ];
  end

  function dfdy = J(t,y)
    dfdy = [ -0.04      1e4*y(3)              1e4*y(2)
              0.04     -6e7*y(2)-1e4*y(3)    -1e4*y(2)
              0          6e7*y(2)              0          ];
  end
end
```

De grafiek van de oplossing die je bekomt is:



2. Gegeven is de bepaalde integraal

$$\int_2^8 1000 \cdot \ln\left(\frac{1250}{1200-18t}\right) - 9.8t\ dt$$

Benader deze integraal numeriek door gebruik te maken van de kwadratuurformule

$$Q(f) = w_1 f(3) + w_2 f(4) + w_3 f(5).$$

Los hierbij de volgende vragen op:

(a) bepaal de coëfficiënten van $Q(f)$ zodanig dat de graad gemaximaliseerd wordt; Wat is de graad?

(b) bepaal de relatieve fout van deze benadering;

(c) Verbeter de nauwkeurigheid van de kwadratuurformule als volgt: pas de formule twee keer toe, een keer in het interval $[2,5]$ en een keer in het interval $[5,8]$. Bepaal de relatieve fout van deze verbetering. Is deze fout in overeenstemming met de graad van de kwadratuurformule? Motiveer je antwoord.

(hint: denk aan wat de foutterm is bij de middelpunt-, trapezium- en Simpson-regel).

Oplossing:

(a) Om de drie coëfficiënten te berekenen moeten we drie vergelijkingen opstellen om deze coëfficiënten te bepalen. Stel hiervoor $f(x) = 1$, $f(x) = x$ en $f(x) = x^2$. We vinden de drie vergelijkingen:

$$[x]_2^8 = 6 = w_1 + w_2 + w_3$$
$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^8 = 30 = 3w_1 + 4w_2 + 5w_3$$
$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^8 = 168 = 9w_1 + 16w_2 + 25w_3$$

We kunnen eenvoudig met Maple berekenen dat $w_1 = 9$, $w_2 = -18$ en $w_3 = 15$. Hiervoor gebruiken we de code

```
restart;
v[1] := 3: v[2] := 4: v[3] := 5:
f := x -> 1000*ln(1250/(1200-18*x))+(-1)*9.8*x;
seq(sum(w[i]*v[i]^j, i = 1 .. 3)-(int(x^j, x = 2 .. 8)), j = 0 .. 2);
solve({%});
assign([%]);
```

Per constructie is de graad van onze kwadratuurformule minstens 2. Proberen we echter een functie zoals x^3 te integreren, dan bekomen we een fout van $9 \cdot 3!$, m.a.w. een functie van de derde graad kunnen we niet exact integreren en de graad van de kwadratuurformule is 2.

(b) Met de volgende extra code vinden we dat de relatieve fout -0.0001812484253 is:

```
If:=int(f(x), x = 2 .. 8):
Qf:=sum(w[i]*f(v[i]), i = 1 .. 3):
(Qf-If)/If;
```

(c) Wanneer we de nauwkeurigheid verhogen door het interval in twee te delen moeten we de punten waar we de functie evalueren herschalen. Zo vinden we dat we, in plaats van in de punten 3,4 en 5, nu in het interval $[2, 5]$ de punten 2.5, 3 en 3.5 gebruiken en in het interval $[5, 8]$ de punten 5.5, 6 en 6.5. Bovendien mogen we elk resultaat slechts voor de helft laten meetellen (elk resultaat berekent namelijk slechts de helft van de oplossing). We hebben de code:

```
Qf1 := (w[1]*f(2.5)+w[2]*f(3)+w[3]*f(3.5))*(1/2):
Qf2 := (w[1]*f(5.5)+w[2]*f(6)+w[3]*f(6.5))*(1/2):
Qdubbelf := evalf(Qf1+Qf2):

(Qdubbelf-If)/If;
```

Nu vinden we dat de relatieve fout slechts -0.00002279005715 is, wat ongeveer een factor 8 kleiner is. Om dit te verklaren, kijken we naar de graad van de kwadratuurregel. Merk hierbij op dat bij de trapeziumregel, die graad 1 heeft, de foutterm begint met $(b - a)^3$. bij de Simpson regel, die graad 3 heeft, begint de foutterm met $(b - a)^5$. Bijgevolg kunnen we voor de gegeven kwadratuurformule met graad 2 verwachten dat de foutterm begint met $(b - a)^4$. Halveren we dus het interval, hebben we een fout van $\frac{1}{2^4}$. We maken deze fout weliswaar twee keer in elk deelinterval dus de fout die we verwachten is $\frac{2}{2^4} = \frac{1}{8}$.

3. Als je een bedrag van 150.000 EUR leent, elke maand 1000 EUR afbetaalt en na 20 jaar alles terugbetaald wil hebben, aan welke maandelijkse rente mag je dan maximaal lenen?

Met behulp van de formule $a(1 + r)^n$, waarbij a het geleende bedrag is, n het aantal maanden en r de maandelijkse rente, kan je nagaan wat het totaal terug te betalen bedrag is na n maanden. Betaal je elke maand een bedrag p terug, dan wordt het hiervoor vermelde bedrag verminderd met $p\left(\frac{(1+r)^n-1}{r}\right)$.

Bespreek om te beginnen op papier hoe je een dergelijk probleem oplost. Implementeer deze oplossing op een efficiënte manier in MATLAB. Wanneer je bepaalde keuzes moet maken, zoals startparameters voor een algoritme, verklaar dan hoe je dergelijke parameters op een verstandige manier kan kiezen.

Oplossing: We zijn op zoek naar de nulpunten van $f(r) = a(1+r)^n - p\left(\frac{(1+r)^n-1}{r}\right)$. Hiervoor kunnen we gebruik maken van bijvoorbeeld de Newton methode $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. De Newton methode heeft weliswaar een initiële gok nodig die dicht bij de oplossing ligt om te vermijden dat de oplossing divergeert. Om een goeie gok te krijgen kunnen we gewoon eens de functie plotten, met ingevulde waarden voor a, p en n, en op basis van deze grafiek een gok maken. De volledige code wordt dan

```
function lening()
  nauwkeurigheid = eps;
  schatting = 0.05;
  delta = 1;
  iteratie = 0;

  n = 240;
  a = 150000;
  p = 1000;

  f = inline('(a*(1+r)^n) - (p*(((1+r)^n-1)/r))', 'a', 'n', 'r', 'p');
  df = inline('a*n*(1+r)^(n-1)+(p*(-1+(1+r)^(n-1)*(1+r-n*r)))/r^2', 'a','n','r','p');

  while abs(delta) > nauwkeurigheid
      delta = f(a,n,schatting,p) / df(a,n,schatting,p);
      schatting = schatting - delta;
      iteratie = iteratie + 1;
  end

  fprintf('%1.8f%% maandelijkse rente (%1.0f iteraties)\n',schatting*100, iteratie)
  jaarlijks = (1 + schatting)^12-1;
  fprintf('Dit komt neer op een jaarlijkse rente van %1.8f%%\n', jaarlijks*100);
end
```

Hieruit blijkt dat we maximaal aan een maandelijkse intrest van 0.42676253% mogen lenen.

4. Construeer een benaderingsformule voor de derde afgeleide $f'''(x)$ van de vorm

$$\frac{Af(x+c_1h)+Bf(x+c_2h)+Cf(x+c_3h)+Df(x+c_4h)}{h^3}$$

op basis van de wortels van de formule $8c^4 - 8c^2 + 1 = 0$. Bepaal de leidende term van de fout.

Oplossing: Dit kan je eenvoudig berekenen met de volgende Maple commando's:

```
restart;
with(CurveFitting):
c:=solve(8*c^4-8*c^2+1);
p:=unapply(PolynomialInterpolation([[x+c[1]*h, f(x+c[1]*h)],
[x+c[2]*h, f(x+c[2]*h)],[x+c[3]*h, f(x+c[3]*h)],[x+c[4]*h, f(x+c[4]*h)]],t),t):
simplify(subs(t=x,diff(p(t),t$3)));
simplify(series(%-(D(D(D(f))))(x), h));
evalf(%);
```

waarna we onmiddellijk de oplossing kunnen aflezen:

$$A = -6\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad B = 6\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad C = -6\sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad D = 6\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

waarbij de leidende term van de fout gegeven wordt door

$$\frac{1}{20} D^{(5)}(f)(x)h^2 + O(h^4)$$

Schrijf jouw oplossingen neer op papier. Plaats de bestanden die je eventueel gemaakt hebt om de vragen op te lossen op Minerva. Dit doe je door

- te surfen naar http://indianio/
- in te loggen met jouw Minerva-gebruikersnaam en -wachtwoord
- jouw bestanden te zippen tot 1 enkel bestand en up te loaden.

Zorg ervoor dat ik uit de naamgeving kan afleiden bij welke vraag elk bestand hoort.

Nog enkele tips :

- schrijf proper : het is de beste manier om te slijmen.
- probeer je antwoorden bondig en correct te formuleren.
- heb je bij Maple en/of MATLAB moeite met (de syntax van) bepaalde commando's, aarzel dan niet hulp te vragen.