Examen Toegepaste Wiskundige Evolutiemodellen (12 juni 2012)
Open Boek

Opmerking: Voor Matlab gebruiken we versie 2011b (Matlab 7_13) en voor MatCont versie 4.2.

1. Een faseportret.

In Syllabus I, pagina 29, Figuur 3.2. vind je de faseportretten van de vouwbifurcatie in een tweedimensionaal systeem voor $\lambda_2 < 0$. Teken zo nauwkeurig mogelijk op je examenblad de faseportretten voor $\lambda_2 > 0$.

2. Subcritische Hopf.

In Syllabus I, pagina 43, Formule 4.7 wordt een dynamisch systeem gespecifieerd dat op een natuurlijke manier past in de ontvouwing van een supercritisch Hopf bifurcatiepunt, d.w.z. een onstabiel equilibrium dat omringd wordt door een stabiele periodieke baan. Geef een analoog voorbeeld van een dynamisch systeem dat op een natuurlijke manier past in de ontvouwing van een subcritisch Hopf bifurcatiepunt, d.w.z. een stabiel equilibrium dat omringd wordt door een onstabiele periodieke baan.

3. Een steen-schaar-papier model.

In een steen-schaar-papier model (de naam is gebaseerd op een kinderspel) vechten de organismen A, B, C om het bezetten van een territorium waarbij A B kan verdringen, B C kan verdringen en C A kan verdringen. We noemen x_1, x_2 en x_3 de fracties van het territorium die door A, B, C bezet zijn, zodat x_1, x_2, x_3 niet-negatief moeten zijn en $\rho = x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ (een gedeelte van het territorium kan onbezet zijn). Het modelleren leidt tot de volgende vergelijkingen, waarin σ, μ strict positieve parameters zijn (voor de numerieke tests mag je $\mu = 0.5, \sigma = 0.5$ nemen):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(\mu(1-\rho) - \sigma x_3) \\ \dot{x}_2 = x_2(\mu(1-\rho) - \sigma x_1) \\ \dot{x}_1 = x_3(\mu(1-\rho) - \sigma x_2) \end{cases} \tag{1}$$

Nu:

1. Vind zoveel mogelijk evenwichtspunten van dit systeem (om ze te vinden kun je zowel een theoretische analyse als numerieke simulatie gebruiken, maar je moet de punten wel exact kunnen opgeven en aantonen dat het evenwichtspunten zijn).
2. Bestudeer de gevonden evenwichtspunten nu theoretisch. Wat kun je met zekerheid zeggen over de stabiliteit van de gevonden evenwichtspunten? (stabiel, asymptotisch stabiel, onstabiel?)

3. Doe numerieke simulaties van het model om de bekomen resultaten zoveel mogelijk te bevestigen. Kloppen de simulaties met hetgeen je verwacht uit de resultaten over stabiliteit? Suggereren ze eventueel nog iets meer dan je theoretisch kon bewijzen?

4. Het Morris-Lecar model.

Maak Oefening 3.2.3 in de Syllabus, deel 2 voor de vaste waarde $v_3 = 11$ (i.p.v. 11.5). (let erop dat de andere vaste parameters die zijn uit Table 2.2 op pagina 27 in de Syllabus, deel 2).

Gent, 12 juni 2012

Prof. W. Govaerts

Examen Toegepaste Wiskundige Evolutiemodellen (12 juni 2012)
Gesloten Boek

1. Tensorproducten.

Is ieder element van het tensorproduct $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ noodzakelijk van de vorm $x \otimes y$ voor zekere $x, y \in \mathbb{C}^n$? Bewijs dit of geef anders een zo eenvoudig mogelijk tegenvoorbeeld.

2. De periode-verdubbelende (flip - PD) bifurcatie.

Beschouw een PD bifurcatie die zich voordoet in een dynamisch systeem voor de parameterwaarde $\alpha = \alpha_0$. De centrale varieteit W_0^c kan daar lokaal geparametrizeerd worden door (τ, ξ), met een parametrizatie die periodiek is in τ met periode $2T$. Binnen deze centrale variëteit wordt de dynamica van het systeem beschreven door:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau}{dt} &= 1 + a\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^4), \\ \dfrac{d\xi}{dt} &= c\xi^3 + \mathcal{O}(\xi^4), \end{cases} \tag{1}$$

waarbij $a, c \in \mathbb{R}$.

In de buurt van de PD bifurcatie, d.w.z. voor nabijgelegen parameterwaarden α kan het dynamisch systeem geherformuleerd worden in W_α^c door

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau}{dt} &= 1 + \nu(\alpha) + a(\alpha)\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^4), \\ \dfrac{d\xi}{dt} &= \beta(\alpha)\xi + c(\alpha)\xi^3 + \mathcal{O}(\xi^4), \end{cases} \tag{2}$$

waarbij $\beta(\alpha_0) = \nu(\alpha_0) = 0$ and $(a(\alpha_0), c(\alpha_0))$ samenvalt met (a, c) in (1).

Opgaven:

1. Bespreek de stabiliteit van de periodieke baan voor $\alpha = \alpha_0$.
2. Bespreek het dynamisch gedrag van het systeem in de buurt van $\alpha = \alpha_0$, in het bijzonder het bestaan en de stabiliteit van de periodieke banen in W_α^c, en wat er gebeurt als α nadert tot α_0.
3. Illustreer dit gedrag met enige schetsen.

3. De epidemische kromme.

Beschouw het systeem dat de epidemische kromme beschrijft:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dX}{d\tau} & = & -R_0XY \\ \frac{dY}{d\tau} & = & R_0XY - Y \\ \frac{dZ}{d\tau} & = & Y, \end{array} \right. \tag{3}$$

waarbij $R_0 > 1$ de basisreproductieverhouding voorstelt. Onderstel dat de epidemie uitbreekt op het tijdstip $t = 0$ voor de beginwaarden $X(0) = X_0$ met $0 < X_0 < 1$, $Y(0) = 1 - X_0$, $Z(0) = 0$. Bereken (uiteraard analytisch) de waarden van X, Y, Z op het ogenblik dat Y (de fractie geïnfecteerden) het hoogste is.

maximaal is

4. Een HIV model.

Beschouw het HIV model met protease afremmer (protease inhibitor):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dT}{dt} & = & \lambda - dT - kV_IT \\ \frac{dT^*}{dt} & = & kV_IT - \delta T^* \\ \frac{dV_I}{dt} & = & -cV_I \\ \frac{dV_{NI}}{dt} & = & N\delta T^* - cV_{NI} \end{array} \right. \tag{4}$$

Opgaven:

1. Geef de betekenis en de dimensies van alle optredende toestandsvariabelen en parameters.
2. Beschrijf de tijdsevolutie van dit model, uitgaande van de vereenvoudigende aanname dat het systeem op het ogenblik $t = 0$ in een evenwichtstoestand is van het systeem zonder protease afremmer en dat T constant blijft tijdens de toepassing van de protease afremmer.
3. Leg uit hoe men uit een vergelijking van de oplossing van dit model en de klinische waarnemingen een schatting kan bekomen van de reproductiesnelheid van de virussen en waarom het kennen van de reproductiesnelheid van belang is voor de behandelingen die men toepast.

Gent, 12 juni 2012

Prof. W. Govaerts