EXAMEN LAAM I — 24 augustus 2012

(BLAD EXAMENINSTRUCTIES WEGGELATEN)

1. Theorie

Opgave 1. (i) Zij V een eindig-dimensionale vectorruimte over een veld K, en zij W, U deelruimten van V met $V = U + W$.

(a) Toon aan dat de afbeelding van U naar de quotiëntruimte V/W,

$$\pi_U : U \to V/W; u \mapsto u + W,$$

een surjectieve lineaire afbeelding is.

(b) Toon aan dat de afbeelding π_U een isomorfisme is als en slechts als $V = U \oplus W$.

(ii) Zij A een symmetrische matrix in $M_n(\mathbb{R})$. Toon aan dat de algebraïsche multipliciteit van elke eigenwaarde λ van A gelijk is aan de meetkundige multipliciteit van λ.

Opgave 2. Zijn volgende uitspraken juist of fout? Indien juist, geef een argument; indien fout, geef een tegenvoorbeeld.

(a) Zij $A = \big(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5\big)$ een (5×5)-matrix over $\mathbb{C}$, waarbij elke A_i een (5×1)-kolommatrix voorstelt. Dan is

$$\det(A) = \det\big(A_5 A_4 A_3 A_2 A_1\big).$$

(b) Zij K een willekeurig veld, en zij A een symmetrische matrix in $M_n(K)$. Dan is A diagonaliseerbaar.

(c) Zij f een lineaire operator op een eindig-dimensionale K-vectorruimte V. Veronderstel dat f tegenover *elke* basis van V dezelfde matrixvoorstelling heeft. Dan is f de identieke operator $f(v) = v$ voor alle $v \in V$.

(d) Zij u en v twee niet-nul vectoren in $\mathbb{R}^3$. Dan is de afbeelding

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon w \mapsto u(v \times w)$$

surjectief.

(e) Zij Q een niet-ontaarde kwadriek in $\mathbb{R}^3$, gegeven door een kwadratische vergelijking $F(x, y, z) = 0$. Veronderstel dat de variabele x niet voorkomt in F (m.a.w. $F(x, y, z)$ hangt enkel af van y en z). Dan is Q een cilinder.

Opgave 3. (1) Stel V, W twee vectorruimten over eenzelfde veld K en stel ϕ een isomorfisme van V naar W. Toon aan dat de afbeelding

$$\Psi : \mathrm{Hom}(V,V) \to \mathrm{Hom}(W,W); f \mapsto \phi \circ f \circ \phi^{-1}$$

een isomorfisme vormt van $\mathrm{Hom}(V,V)$ naar $\mathrm{Hom}(W,W)$.

(2) Stel f een lineaire afbeelding op een eindig-dimensionale inproductruimte $(V, \langle .,. \rangle)$ over $\mathbb{C}$. Veronderstel verder dat $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ voor alle $u, v \in V$. Bewijs dat f een isomorfisme vormt op V.

Opgave 4. Stel $(V, \langle .,. \rangle)$ een eindig-dimensionale inproductruimte over $\mathbb{C}$ en $f : V \to V$ een lineaire afbeelding.

(1) Toon aan dat voor een vaste $v \in V$

$$\psi_v : V \to \mathbb{C}; u \mapsto \langle f(u), v\rangle$$

behoort tot V^*.

(2) Toon aan dat er een unieke lineaire afbeelding $\tilde{f} : V \to V$ bestaat zodanig dat

$$\langle f(u), v\rangle = \langle u, \tilde{f}(v)\rangle \quad \forall u, v \in V.$$

Hint: Gebruik [Hoofdstuk 6, oef. 1(ii)] uit de oefeningenfiles.

Opgave 5. Zij $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

(i) Voor welke waarden van a is A diagonaliseerbaar? Diagonaliseer A indien mogelijk.

(ii) Bepaal een orthogonale basis van eigenvectoren voor A (voor elke waarde van a waarvoor dit mogelijk is).