Lineaire Algebra & Analytische Meetkunde II

Eerste Bachelor Wiskunde

Koen Thas — Bert Seghers

5 september 2012, 8:30

1. Definieer het begrip *dilatatie* op een affiene ruimte. Bewijs dat de verzameling van alle dilataties van een vaste affiene ruimte een groep vormt onder de samenstelling. Is deze groep commutatief? (Motiveer je antwoord in detail!)

2. Definieer het begrip *Hermitische afbeelding*. Voor een Hermitische afbeelding $g : \mathscr{U}_n \longrightarrow \mathscr{U}_n$, $n \in \mathbb{N}^\times$, is er steeds een orthonormale basis van eigenvectoren. Bewijs dit.

3. Zij $\mathbb{K}$ een veld en $n \in \mathbb{N}^\times$. Bewijs nu de affiene stelling van Desargues: zijn D_1, D_2 en D_3 drie rechten van $\mathbf{AG}(n, \mathbb{K})$ die door een punt s gaan, en zijn $a_i, b_i, 1 \leq i \leq 3$ verschillende punten van de rechte D_i zodanig dat $\langle a_1, a_2 \rangle \parallel \langle b_1, b_2 \rangle$ en $\langle a_2, a_3 \rangle \parallel \langle b_2, b_3 \rangle$, dan zal ook $\langle a_1, a_3 \rangle \parallel \langle b_1, b_3 \rangle$.

4. Bewijs dat $\dim \operatorname{Bil}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = mn$, met $m, n \in \mathbb{N}^\times$.

5. Zij (V, f) een reflexieve bilineaire ruimte met radicaal R en zij W een complementaire ruimte aan R (dus $V = R \oplus W$). Toon aan dat de restrictie van f op W een niet-ontaarde bilineaire vorm is. (Hint: kies een goede basis en analyseer de matrixvoorstelling van f ten opzichte van deze basis.)

6. Tel, in $\mathbf{AG}(n, q)$, q een priemmacht, het aantal d-dimensionale affiene deelruimten door een vaste k-dimensionale deelruimte, voor $0 \leq k \leq d \leq n$.

7. Bepaal de barycentrische coördinaten van het punt $p\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ t.o.v. de vier punten $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Beschrijf de positie van p meetkundig t.o.v. het viervlak gevormd door de laatste vier punten.

8. Zij Π een hypervlak in $\mathbf{AG}(n, q), n \geq 3, q$ een priemmacht. Wat zijn de mogelijke liggingen van een rechte ten opzichte van Π en hoeveel zijn er van elke soort? Bereken al deze aantallen onafhankelijk van elkaar. Controleer dat hun som gelijk is aan het totaal aantal rechten in $\mathbf{AG}(n, q)$.