Examen Toegepaste Wiskundige Evolutiemodellen (20 augustus 2012)
Gesloten Boek

---

1. Tensorproducten.

Beschouw een algemeen element

$$z = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} e_i \otimes e_j \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$$

van het tensorproduct $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$.

Geef een nodige en voldoende voorwaarde voor de coëfficiëntenmatrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ opdat z van de vorm $z = x \otimes y$ zou zijn met $x, y \in \mathbb{C}^n$.

2. De limietpunt-van-cycli (LPC) bifurcatie.

Beschouw een LPC bifurcatie die zich voordoet in een dynamisch systeem voor de parameterwaarde $\alpha = \alpha_0$. De centrale varieteit W_0^c kan daar lokaal geparametrizeerd worden door de reële variabelen τ, ξ, voor kleine $|\xi|$ en waarbij de parametrizatie periodiek is in τ met periode T_0, de periode van de cykel. In W_0^c kan het dynamisch systeem dan geherformuleerd worden door

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d\tau}{dt} & = & 1 - \xi + a\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3), \\ \dfrac{d\xi}{dt} & = & b\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3), \end{array} \right. \tag{1}$$

waarbij $a, b \in \mathbb{R}$.

In de buurt van de LPC bifurcatie, d.w.z. voor nabijgelegen parameterwaarden α kan het dynamisch systeem geherformuleerd worden in W_α^c door

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d\tau}{dt} & = & 1 + \nu(\alpha) - \xi + a(\alpha)\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3), \\ \dfrac{d\xi}{dt} & = & \beta(\alpha) + b(\alpha)\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3), \end{array} \right. \tag{2}$$

Opgaven:

1. Bespreek de stabiliteit van de periodieke baan voor $\alpha = \alpha_0$.
2. Bespreek het dynamisch gedrag van het systeem in de buurt van $\alpha = \alpha_0$, in het bijzonder het bestaan en de stabiliteit van de periodieke banen in W_α^c, en wat er gebeurt als α nadert tot α_0.

3. Illustreer dit gedrag met enige schetsen.

3. Model van Kermack en McKendrick.

Het eerste model van Kermack en McKendrick beschrijft een ziekte die uitbreekt in een gesloten populatie met constante omvang:

$$\begin{cases} \dot{S} &= -\beta SI, \\ \dot{I} &= \beta SI - \gamma I, \\ \dot{R} &= \gamma I. \end{cases} \tag{3}$$

De beginvoorwaarden zijn $S(0) \approx N$, $I(0) = N - S(0) \approx 0$, $R(0) = 0$. Bespreek dit model, d.w.z.

1. Bespreek de betekenis van S, I, R en van de parameters van het systeem.
2. Beschrijf hoe men dit systeem kan herschalen zo dat het nog slechts afhangt van een enkele parameter R_0.
3. Leid hieruit de voorwaarde af die moet vervuld zijn opdat een epidemie zou kunnen uitbreken wanneer een klein aantal geïnfecteerde individuen in de populatie gebracht wordt.
4. Verklaar hoe de ziekte kan uitsterven voor al de leden van de populatie besmet zijn en stel een vergelijking op voor de fractie Z_∞ van de bevolking die de ziekte krijgt voor zij uitsterft.

4. Het SIR model.

Beschouw het constante-bevolkings SIR model met geboorten, d.w.z.

$$\begin{cases} \dot{S} &= \mu N - \beta SI - \mu S, \\ \dot{I} &= \beta SI - (\gamma + \mu) I, \\ \dot{R} &= \gamma I - \mu R. \end{cases} \tag{4}$$

Bespreek dit model, d.w.z.

1. Bespreek de betekenis van S, I, R en van de parameters van het systeem in een typische situatie zoals mazelen of windpokken.
2. Definieer het basis reproductietempo R_0 en bereken het in termen van de parameters van het systeem.
3. Bespreek de evenwichtstoestanden en hun stabiliteit.

4. Bespreek het schatten van de parameters van het systeem.

5. Bespreek het dynamisch gedrag dat men kan verwachten onder redelijke aannames zoals voor mazelen of windpokken.

Gent, 20 augustus 2012

Prof. W. Govaerts

Examen Toegepaste Wiskundige Evolutiemodellen (20 augustus 2012)
Open Boek

Opmerking: Voor Matlab gebruiken we versie 2011b (Matlab 7_13) en voor MatCont versie 4.2.

1. De repressilator.

Beschouw het model [4.1], bladzijde 112 in het boek van Ellner en Guckenheimer, voor een genetisch netwerk dat werkt als een klok. Toon (analytisch) het volgende aan:

1. Voor iedere $n > 1$ bestaan er systemen van deze vorm die stabiele equilibria hebben. Geef voor iedere $n > 1$ voorbeelden van waarden voor de andere parameters α, α_0, β waarvoor dit voorkomt.
2. Voor iedere $n > \frac{4}{3}$ bestaan er systemen van deze vorm waarvoor het symmetrisch equilibrium onstabiel is (en we dus stabiele periodieke oplossingen verwachten). Geef voor iedere $n > \frac{4}{3}$ voorbeelden van waarden voor de andere parameters α, α_0, β waarvoor dit voorkomt.

2. Neuraal model.

Beschouw het twee-parameter bifurcatiediagram van het Morris-Lecar model zoals op het bijgevoegd blad (overgenomen uit de theorie, Deel Advanced Applications, p.42). Beschouw de gesloten kromme in het parametervlak die begint en eindigt in punt A. Beschrijf welke bifurcaties je ontmoet als de parameters (I, v_3) deze kromme doorlopen, welke stabiele en onstabiele equilibria en periodieke banen je vindt in de gebieden tussen twee bifurcaties, welke homoclinische banen je tegenkomt en welke fenomenen (bursting, excitatie) je ontmoet.

3. Morris-Lecar.

Beschouw het Morris-Lecar model zoals gebruikt in Hoofdstuk 3 van het deel "Advanced Applications" en met dezelfde parameters, maar met vaste $v_3 = 3$ en met variabele I_{app}. Bestudeer het model numeriek met variabele I_{app} en geef de informatie die je zo kunt vinden over het gedrag van het model. Dit kan bijvoorbeeld zijn: bifurcatiepunten van equilibria en periodieke banen, coordinaten van zulke bifurcatiepunten, periodes van periodieke banen in bifurcatiepunten, normaalvormcoefficienten en de betekenis van deze coefficienten, stabiliteit of unstabiliteit, aantal equilibria of periodieke banen voor bepaalde parameter-intervallen, multistabiliteit in bepaalde parameter-intervallen etcetera.

Zijn de bekomen resultaten consistent met wat je zou verwachten uit Figure 3.2 op bladzijde 42 van de Syllabus, deel 2?

Het kan hierbij nodig zijn, de variabele MaxStepsize te vergroten tot bijvoorbeeld 5 om de berekeningen sneller te laten verlopen. Het is ook mogelijk dat je bij sommige berekeningen problemen ondervindt; vermeld deze dan.

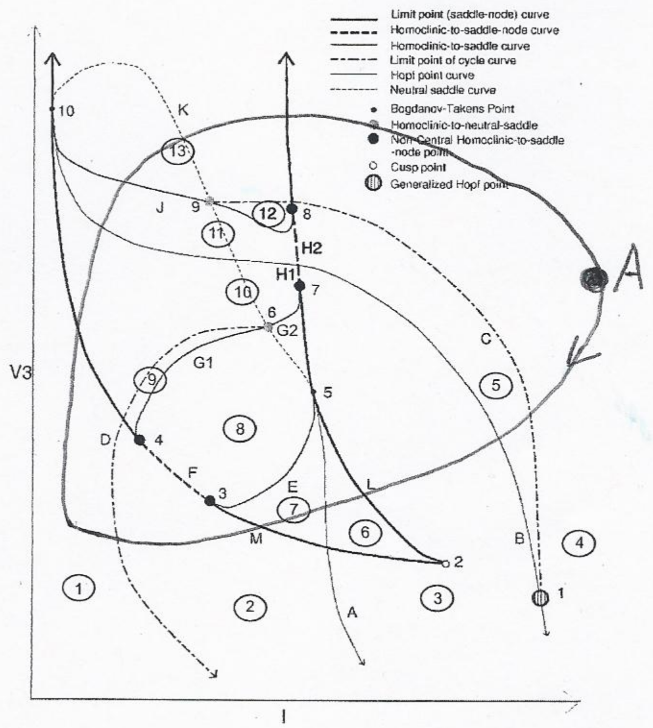

Figure 3.2: Qualitative bifurcation diagram in the biologically most relevant parameter range. v_3-values for the numbered points: $1 = 2.02153$, $2 = 3.74191$, $3 \approx 4.47$, $4 = 4.48019$, $5 = 9.67349$, $6 = 10.88588$, $7 = 12.42132$, $8 \approx 9 \approx 17.25$, $10 = 57.10678$.