# EXAMEN
# RELATIVITEITSTHEORIE

Academiejaar 2012-2013

28/01/2013

theorie

1. Relativistisch testdeeltje in een elektromagnetisch veld op de Minkowski ruimte-tijd.

   - Leid de manifest covariante bewegingsvergelijkingen, gegeven de actie:

   $$S = -mc \int_a^b ds - e \int_a^b A_\mu dx^\mu \tag{1}$$

   - Toon expliciet aan dat we inderdaad de gekende uitdrukking terugvinden voor de Lorentzkracht ($\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}$).

2. De Einstein-vergelijking

   - Voor de Riemann tensor hebben we de Bianchi-identiteit:

   $$D_\rho R_{\mu\nu\alpha\beta} + D_\beta R_{\mu\nu\rho\alpha} + D_\alpha R_{\mu\nu\beta\rho} = 0\,. \tag{2}$$

     Bewijs deze identiteit.

   - Definieer nu de Einstein-tensor $G_{\mu\nu}$, en toon aan dat deze voldoet aan

   $$D^\mu G_{\mu\nu} = 0\,. \tag{3}$$

   - Beschouw dan de geodetische vergelijking in het Newtoniaanse regime, en verkrijg hieruit het verband tussen de Newtoniaanse potentiaal $\phi$ en de metriekcomponent $g_{00}$.

   - Gebruik tenslotte dit verband om de Einstein-vergelijking *af te leiden*.

Gegeven:

- De commutator van covariante afgeleiden voor een vector $V^\kappa$ en tensor $T_\rho{}^\kappa$:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]V^\kappa &= R^\kappa{}_{\sigma\mu\nu}V^\sigma\,, & (4)\\ [D_\mu, D_\nu]T_\rho{}^\kappa &= -R^\sigma{}_{\rho\mu\nu}T_\sigma{}^\kappa + R^\kappa{}_{\sigma\mu\nu}T_\rho{}^\sigma\,. & (5) \end{aligned}$$

- de Newtoniaanse vergelijkingen

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\phi\,, \tag{6}$$

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho_m\ . \tag{7}$$

3. Kort maar krachtig

- De gravitatiekracht van de zon hier op aarde, $F_{zon} = \frac{G_N M_{zon} m}{|x_{aarde} - x_{zon}|^2}$ is vele malen groter dan die van de maan, $F_{maan} = \frac{G_N M_{maan} m}{|x_{aarde} - x_{maan}|^2}$. Toch zien we hier op aarde vooral het effect van het gravitatieveld van de maan. Leg uit.
- Beschouw de uitdrukkingen

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \qquad \partial_\mu \partial^\mu \phi\,, \tag{8}$$

met $\phi(x)$ een scalair veld. Zeg voor elk van de twee uitdrukkingen of ze invariant zijn onder Lorentztransformaties.

- Zelfde vraag als hierboven, maar nu voor algemene coördinatentransformaties.

# Examen Relativiteitstheorie deel II: oefeningen

28 januari 2013

Het oefeningen examen is een open-boek examen, zonder oplossingen van oefeningen. Verder hebt u geen nood aan rekenmachines, gsm's of eender welke vorm van elektronica. Het examen telt twee vragen.

1. Wanneer een foton verstrooit aan een geladen deeltje dat beweegt aan een snelheid dicht bij de lichtsnelheid, ondergaat het foton zogenaamde *inverse Compton verstrooiing*. Beschouw een inverse Compton verstrooiing waar een geladen deeltje met rustmassa $m$ en totale energie (zoals gezien in het laboratoriumstelsel) $E \gg mc^2$, frontaal botst met een foton met frequentie $\nu$ ($h\nu \ll mc^2$). Wat is de maximale energie van het foton (in het laboratioriumstelsel) na de interactie?
   Benader je exacte uitkomst vervolgens in de gegeven limiet.

2. Bereken de werkzame doorsnede $\sigma$ voor het vangen van vrije deeltjes door een Schwarzschild zwart gat met Schwarzschild straal $R_S$ in de limiet van deeltjes met een hoge snelheid. De werkzame doorsnede is gedefinieerd met behulp van de kritische impact parameter $b_{\text{krit}}$,

$$\sigma = \pi b_{\text{krit}}^2 = \pi \left( \frac{L_{\text{max}}}{|\vec{p}|} \right)^2 = \pi \frac{c^2 L_{\text{max}}^2}{(E^2 - m^2 c^4)},$$

   met $L_{\text{max}}$ het maximale draaimoment waarvoor het deeltje nog gevangen wordt, gegeven de energie $E$. Voor snelle deeltjes, $E \gg mc^2$, geldt de limiet $\tilde{L}_{\text{max}} \gg R_s c$. Beargumenteer deze limiet.

Veel succes!