Statistische Fysica 1: 21 januari 2013

- Duur van het examen: 08u30-12u30.
- Voor je aan je oefeningen begint geef je je antwoord op de theorievraag af.
- Heel veel succes!

THEORIE

1. VRAAG 1 (10 PUNTEN)

Voor een ideaal kwantumgas kan de volgende uitdrukking voor de gemiddelde bezetting van de één-deeltjesniveau's afgeleid worden

$$\overline{n_i} = \frac{1}{\exp \beta\left(\epsilon_i - \mu\right) \pm 1} \; .$$

- Maak een schets van $\overline{n_i}$ tegen een goed gekozen dimensieloze variabele. Duid het zogenaamde klassiek regime aan en toon aan dat in dit regime bovenstaande uitdrukking equivalent is met de Boltzmann uitdrukking voor de bezetting van ϵ_i

$$p(\epsilon_i) = \mathcal{C} \exp -\beta\epsilon_i \; .$$

  Bepaal ook de $\mathcal{C}$ die in deze uitdrukking voorkomt.
- Wat is Bose-Einstein condensatie? Duid op de schets die je in vorig punt maakte het regime aan waar Bose-Einstein condensatie optreedt.
- Beschouw een systeem van N spin-$\frac{9}{2}$ deeltjes in een volume V. Leid een uitdrukking voor de Fermi-energie ϵ_F voor dit systeem af. Je kunt hierbij gebruik maken van de uitdrukking voor het aantal mogelijke staande golven met impuls p in het interval $[p, p+dp]$

$$f(p)dp \;=\; \frac{4\pi V}{h^3}\, p^2 \, dp \; .$$

- Beschouw een ideaal Fermi gas van N relativistische elektronen (massa m_e) in een volume V. Toon aan dat bij $T = 0\ K$ de druk van het gas gegeven wordt door

$$P_0 = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3}\left[\frac{1}{3} x_F^3 \sqrt{1+x_F^2} - \int_0^{x_F} dx x^2 \sqrt{1+x^2}\right] \; ,$$

  met

$$x_F = \frac{\hbar}{m_e c}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{1/3} \; .$$

  Hoe kan men fysisch het ontstaan van een druk bij het absolute nulpunt begrijpen?

2. VRAAG 2 (20 PUNTEN)

MONDELING EXAMEN

OEFENINGEN

BIJ HET OPLOSSEN VAN DE OEFENINGEN KUN JE JE CURSUS GEBRUIKEN! ER MAG ONDER GEEN BEDING GEBRUIK GEMAAKT WORDEN VAN SETS VAN OPGELOSTE OEFENINGEN.

OEFENING 1: HET IDEAAL FERMI GAS IN 2 DIMENSIES (12 PUNTEN)

Beschouw een systeem van N niet-interagerende spin-$\frac{3}{2}$ deeltjes met massa m, die gedwongen worden op een twee-dimensionaal oppervlak A te bewegen.

De deeltjes bevinden zich in het extreem-relativistisch regime $(p \gg mc)$ **zodat het verband tussen energie en impuls gegeven wordt door** $E \approx cp$**.**

1. Bepaal de Fermi-energie $\epsilon_F(N, A)$ van het systeem in kwestie.

2. Beschouw de situatie waarbij het systeem zich bevindt in omstandigheden van extreem lage temperaturen $T \approx 0$: bepaal de gemiddelde energie $\overline{E}$, de warmtecapaciteit bij constant oppervlak C_A en de entropie S.
   Zijn je resultaten in overeenstemming met wat je op basis van fysische argumenten verwacht?

3. Beschouw nu temperaturen T veel hoger dan de Fermi-temperatuur.

   (a) Bepaal binnen het raamwerk van het "groot-canonisch systeem" de gemiddelde energie $\overline{E}$ en de chemische potentiaal van het systeem, waarbij je voor beide grootheden telkens de eerste-orde kwantummechanische correctie weerhoudt.

   (b) Bereken ook de $\overline{E}$ en de chemische potentiaal van het systeem binnen het raamwerk van het "klassiek canonisch systeem". Hoe vergelijken je resultaten zich met wat je in het vorig punt bekwam?

Oefening 2: Gas en absorptie aan een oppervlak (8 punten)

Beschouw een klassiek en ideaal gas in een volume V en omgeven door een oppervlak van N_0 ONDERSCHEIDBARE POSITIES die elk de mogelijkheid bezitten om één enkele gasmolecule te absorberen. Deze absorptie is mogelijk door de aanwezigheid van een potentiaalval met grootte $\Delta E = - \mid \epsilon \mid$ op de posities van de N_0 absorptieplaatsen. Noem $n \leq N_0$ het aantal absorptieplaatsen die daadwerkelijk bezet zijn.

Bij deze oefening mag je ervan uit gaan dat het systeem zich steeds "klassiek" gedraagt.

1. Bepaal een uitdrukking voor de fractie van de bezette absorptieplaatsen $\frac{n}{N_0}$ bij een temperatuur T. Bereken de temperatuursafhankelijkheid $\frac{n}{N_0}$ voor de twee extreme gevallen $kT \ll \mid \epsilon \mid$ en $\mid \epsilon \mid \ll kT$. Zijn je resultaten in overeenstemming met wat je op basis van fysische argumenten verwacht?

2. Bereken de entropie van het totaal systeem bij een temperatuur T.

TIP: De grootcanonische partitiefunctie kan geschreven worden als

$$\mathcal{Z}(T, V, \mu) = \sum_N z^N Z(N, T, V) \ .$$