Examen Vaagheids- en Onzekerheidsmodellen

22 januari 2013

Schrijf uw naam bovenaan elk antwoordenblad (geruit blad) waarop u iets geschreven hebt. Schrijf niet met potlood of in het rood of in een onleesbaar kleur (b.v. geel) op de antwoordenbladen. Vermeld duidelijk het nummer van de (deel)vraag bij elk antwoord. Indien u een (deel)vraag niet beantwoordt, vermeld dan ook duidelijk het nummer van deze (deel)vraag samen met de vermelding "geen antwoord". Geef bij elk antwoord telkens de nodige uitleg en berekeningen zodat duidelijk wordt wat uw redenering is.

1. Geef de definitie van een orde-isomorfisme en van een tralie-isomorfisme tussen twee tralies $(L_1, \vee_1, \wedge_1)$ en $(L_2, \vee_2, \wedge_2)$ en bewijs dat deze twee begrippen equivalent zijn.

2. Beschouw een t-norm T, een t-conorm S en een negator N op $[0,1]$. Beschouw de uitspraken:

$$A \cap_T B = \emptyset \iff B \subseteq \mathrm{co}_N A, \quad \forall (A,B) \in (\mathcal{F}(X))^2, \text{ en} \tag{1}$$
$$A \cup_S B = X \iff \mathrm{co}_N A \subseteq B, \quad \forall (A,B) \in (\mathcal{F}(X))^2. \tag{2}$$

   (i) Bewijs dat (1) en (2) gelden van zodra T voldoet aan het residu-principe, S de N-duale is van T, N involutief is en $N = N_{I_T}$.

   (ii) Geldt onder dezelfde voorwaarden als in (i) dat

$$A \cap_T \mathrm{co}_N A = \emptyset,$$
$$A \cup_S \mathrm{co}_N A = X,$$

   voor alle $A \in \mathcal{F}(X)$? Geef een bewijs indien geldig en een tegenvoorbeeld indien niet geldig.

   (iii) Geldt (1) voor algemene T, S en N? Geldt één van de twee implicaties in (1) nog voor algemene T, S en N? Geef telkens een bewijs indien geldig en een tegenvoorbeeld indien niet geldig.

3. Zij $(A_j)_{j \in J}$ een familie in $\mathcal{F}(X)$. Gelden

$$\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big)_\alpha = \bigcap_{j\in J} (A_j)_\alpha, \quad \forall \alpha \in]0,1], \text{ en}$$
$$\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big)_\alpha = \bigcup_{j\in J} (A_j)_\alpha, \quad \forall \alpha \in]0,1]?$$

Geef voor elk van de gelijkheden een bewijs indien geldig. Indien de gelijkheid niet geldig is, geef een bewijs voor de inclusie die wel geldig is (indien er een geldige inclusie is) en een tegenvoorbeeld voor de ongeldige inclusie(s).

4. Wat is het verschil tussen wazigverzamelingen, vaagverzamelingen en ruwverzamelingen? Zijn er ook verbanden? Een korte uitleg aan de hand van een voorbeeld volstaat.

   We herinneren dat een ruwverzameling $(R\downarrow A, R\uparrow A)$ gedefinieerd is als, voor $A \subseteq X$ en voor $y \in X$:

$$y \in R\downarrow A \iff [y]_R \subseteq A,$$
$$y \in R\uparrow A \iff [y]_R \cap A \neq \emptyset,$$

   waarbij $[y]_R$ de equivalentieklasse voorstelt waartoe y behoort, met R een equivalentierelatie op X.

5. Beschouw de vaaggrootheden A en B gegeven door

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{als } x \in [0,1], \\ \frac{1}{2}, & \text{als } x \in [1,3], \\ -\frac{x}{2}+2, & \text{als } x \in [3,4], \\ 0, & \text{anders} \end{cases}$$

   en

$$B(x) = \begin{cases} x-1, & \text{als } x \in [1,2], \\ -x+3, & \text{als } x \in [2,3], \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

   Bereken $\widetilde{\max}(A,B)$. Stel het resultaat grafisch voor.