1. Formuleer de hoofdstelling van de complexe analyse (zonder bewijs). Toon de formule van Cauchy aan.

2. Toon aan:

   (a)
$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$$
   definieert een holomorfe afbeelding op het halfvlak $\operatorname{Re} z > 0$.

   (b) Γ kan uitgebreid worden tot een holomorfe afbeelding op heel $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

   (c) Γ heeft een enkelvoudige pool in 0 met $\operatorname{res}_{z=0} \Gamma(z) = 1$.

   (d)
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$$

3. Definieer een homotopie in een open $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Toon aan:

   Stelling. *Zij Γ een eenvoudige kromme. Zij f, g holomorf op $[\Gamma]$. Als $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ voor elke $z \in \Gamma$, dan is het aantal nulpunten van f in (Γ) gelijk aan het aantal nulpunten van g in (Γ) (geteld volgens hun multipliciteit).*

   Toon ook de lemma's aan die je hierbij gebruikt.

4. Beantwoord de vragen:

   Stelling. *Een geïsoleerd singulier punt z_0 van f is ophefbaar*[1] *als en slechts als*
$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0.$$

   Bewijs. Is z_0 ophefbaar, dan is $\lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0) \lim_{z \to z_0} f(z) \overset{[2]}{=} 0$. Omgekeerd behandelen we eerst het geval $z_0 = 0$. We nemen dus aan dat $zf(z) \to 0$ als $z \to 0$. Voor het holomorf deel A van f in het punt 0 is $zA(z) \to 0$ als $z \to 0$,[3] zodat voor het singulier deel B ook $zB(z) \to 0$ als $z \to 0$.[4] Als $|z| \to \infty$, dan is $1/z \to 0$, zodat dan $g(z) := B(1/z)/z \to 0$. Omdat
$$g(z) \overset{[5]}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n-1}, \quad \text{als } |z| \text{ voldoende groot is}$$
   is g holomorf op heel $\mathbb{C}$[6] en begrensd[7]. Omdat ... [8] is g dus constant. Omdat $g(z) \to 0$ als $|z| \to \infty$ is die constante gelijk aan 0. Bijgevolg is ook $B = 0$.

   Zij nu z_0 willekeurig. ... [9] □

   [1] Hoe kan een ophefbare singulariteit gedefinieerd worden a.d.h.v. de Laurent-ontwikkeling?
   [2] Leg deze gelijkheid uit uitgaand van de definitie van ophefbare singulariteit in [1].
   [3-7] Verklaar.
   [8] Vul in.
   [9] Leg uit hoe de stelling voor willekeurige z_0 bewezen kan worden met behulp van de functie $g(z) := f(z + z_0)$, eens het bijzonder geval $z_0 = 0$ aangetoond is.

Examen oefeningen Wiskundige analyse III
24 Januari 2013

Oefening 1. Zij $f(z) = 2ize^{(1+i)z^2+2i}$. Bereken $\max_{z \in B(0,2)} |f(z)|$.

Oefening 2. Pas het bewijs van het Lemma van Schwartz(pagina 68 in de cursus) aan om volgende stelling te bewijzen.

Zij f holomorf in $B(0,R)$, $R > 1$, met $f(i) = 0$ en $f(-i) = 0$. Verder is $|f(z)| \leq M$ voor elke $z \in B(0,R)$. Bewijs dat

$$|f(z)| \leq \frac{|z^2 - 1|M}{R^2 - 1}, \forall z \in B(0,R).$$

Als gelijkheid zich voordoet voor zekere $z \in B(0,R) \setminus \{-i, i\}$, dan is f de samenstelling van de functie $z \mapsto \frac{(z^2-1)M}{R^2-1}$, en een rotatie rond 0.

Oefening 3. Het doel van deze oefening is om de reële integraal

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin^2(mx)}{x^2(x^2 + a^2)} dx, \qquad m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$$

te berekenen.

1. Bewijs de identiteit
$$\sin^2(mz) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(1 - e^{2miz}\right),$$
voor alle $z \in \mathbb{R}$.

2. We zullen $f(z) = \dfrac{(1 - e^{2miz})}{z^2(z^2 + a^2)}$ over een gepaste contour Γ integreren. We stellen Γ gelijk aan het lijnstuk $[-R, R]$ gevolgd door de bovenste helft van de cirkel met straal R. Verklaar waarom dit een goede keuze is.

3. Bereken $\int_\Gamma f(z)dz$ over de hierboven beschreven contour aan de hand van de residustelling, en leid hieruit de waarde van I af.

Oefening 4. Zij f een functie meromorf op heel $\mathbb{C}$ met enkel singulariteiten in de punten 1 en i. In 1 bezit ze een pool van orde 5, en in i een pool van orde 6. Het is gegeven dat in $B(0, 1/2)$ geldt dat $f(z) = g(z)^{11}$, waar g een holomorfe functie is op $B(0, 1/2)$, en $g(0) = 0$. Ook weet je dat $\lim_{z\to\infty} f(z) = 2$.

1. Bewijs dat f een rationale functie is.

2. Bepaal f expliciet.

Oefening 5. Zij $f(z) = \frac{e^{1/z}}{(z-1)(z-2)}$. Bepaal de singulariteiten van deze functie en bereken hun residu's.