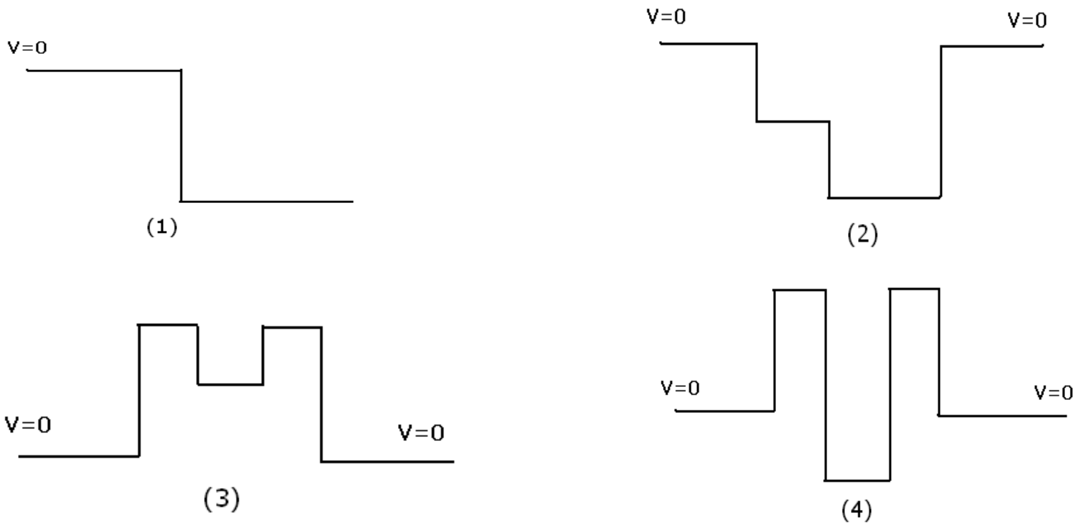
Examen “Kwantummechanica 1”: 28 januari 2013

THEORIE

Antwoord bondig en gevat!

1. THEORIEVRAAG 1 (10 PUNTEN)

   - De figuur toont vier één-dimensionale potentialen. Welke van deze potentialen bezit ZOWEL gebonden als ongebonden energie eigentoestanden? Verklaar duidelijk je antwoorden en de keuzes die je maakt.



   - Beschouw een deeltje dat beweegt in drie dimensies. De kwantummechanische operator horend bij het baanimpulsmoment $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ wordt aangeduid als $\widehat{\vec{L}}$ en de bijbehorende componenten als $\left(\widehat{L_x}, \widehat{L_y}, \widehat{L_z}\right)$.

     (a) Bewijs dat $\widehat{L_y}$ een hermitische operator is.

     (b) Bewijs de volgende commutatorbetrekking

     $$\left[\widehat{L_y}, \widehat{L_z}\right] = i\hbar\widehat{L_x} \; .$$

     (c) Is het mogelijk om gemeenschappelijke eigenfuncties van $\widehat{L_y}$ en $\widehat{L_z}$ te bepalen? Verklaar je antwoord.

     (d) Toon aan dat de twee operatoren $\widehat{L_z}$ en $\widehat{L^2} = \widehat{L_x^2} + \widehat{L_y^2} + \widehat{L_z^2}$ wel degelijk gemeenschappelijke eigenfuncties bezitten.

     (e) Geef de definitie van de grootheden (ΔL^2) en (ΔL_z). Wat is de fysische betekenis van deze grootheden?

2. THEORIEVRAAG 2 (20 PUNTEN) *MONDELING EXAMEN*

Examen “Kwantummechanica 1”: 28 januari 2013

OEFENINGEN

BIJ HET OPLOSSEN VAN HET OEFENINGENGEDEELTE MOGEN ENKEL DE CURSUSNOTA'S (TRANSPARANTEN) EN HET HANDBOEK “QUANTUM MECHANICS” VAN BRANSDEN EN JOACHAIN GEBRUIKT WORDEN.

OEFENING 1 (10 PUNTEN)

Een deeltje met massa M beweegt in een potentiaal $V(x)$ die 0 is voor $0 \leq x \leq L$ en die $+\infty$ is voor andere waarden van x. Op het tijdstip $t = 0$ wordt het deeltje in een toestand gebracht die beschreven wordt door de volgende golffunctie:

$$\Psi(x, t = 0) = A\psi_{E_2}(x) + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\alpha} \psi_{E_3}(x) \ ,$$

waarbij α een reëel getal, $\psi_{E_2}(x)$ de genormeerde golffunctie is horend bij de eerste aangeslagen toestand en $\psi_{E_3}(x)$ de genormeerde golffunctie is bij de tweede aangeslagen toestand.

1. Bepaal de genormeerde golffunctie $\Psi(x, t)$ van het deeltje op een arbitrair tijdstip t.

2. Bepaald de verwachtingswaarde van de energie op een arbitrair tijdstip t. Kan $\Psi(x, t)$ een *stationaire toestand* genoemd worden? Verklaar je antwoord.

3. Bepaal de verwachtingswaarde van de positie van het deeltje op een arbitrair tijdstip t.

4. Noem $P_-(t)$ de probabiliteit dat het deeltje zich op tijdstip t in het interval $0 \leq x < \frac{L}{2}$ bevindt. Analoog, $P_+(t)$ is de probabiliteit dat het deeltje zich op tijdstip t in het interval $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ bevindt. Bereken $P_+(t)$ en $P_-(t)$.

5. Bereken
$$\frac{dP_+(t)}{dt} \ \text{en,} \ \frac{dP_-(t)}{dt} \ ,$$
en bespreek je resultaat.

6. Stel een verband op tussen de grootheid $\frac{dP_+(t)}{dt}$ en de waarschijnlijkheidsstroomdichtheid van het systeem. Geef duidelijk aan welke redenering je hierbij volgt. Om deze vraag op te lossen is het NIET nodig om de waarschijnlijkheidsstroomdichtheid expliciet te berekenen.

OEFENING 2 (5 PUNTEN)

Beschouw een systeem dat beschreven wordt door middel van een Hamiltoniaan H. De Hamiltoniaan H heeft twee eigentoestanden (ψ_1, ψ_2) met corresponderende energie-eigenwaarden (E_1, E_2). Een willekeurige operator A heeft twee eigentoestanden (ξ_1, ξ_2) met corresponderende eigenwaarden (a_1, a_2).

De matrixrepresentatie van de operator A in de basis (ψ_1, ψ_2) heeft de volgende vorm

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{a} \\ \mathrm{a} & 0 \end{pmatrix},$$

met a een reëel getal.

1. Bereken de verwachtingswaarde $\langle A \rangle$ van de operator A voor de meest algemene oplossing $\Psi(x,t)$ van de tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking voor het systeem. Bewijs dat de tijdsafhankelijkheid van $\langle A \rangle$ oscillatorisch is en bepaal de periode van de oscillatie.

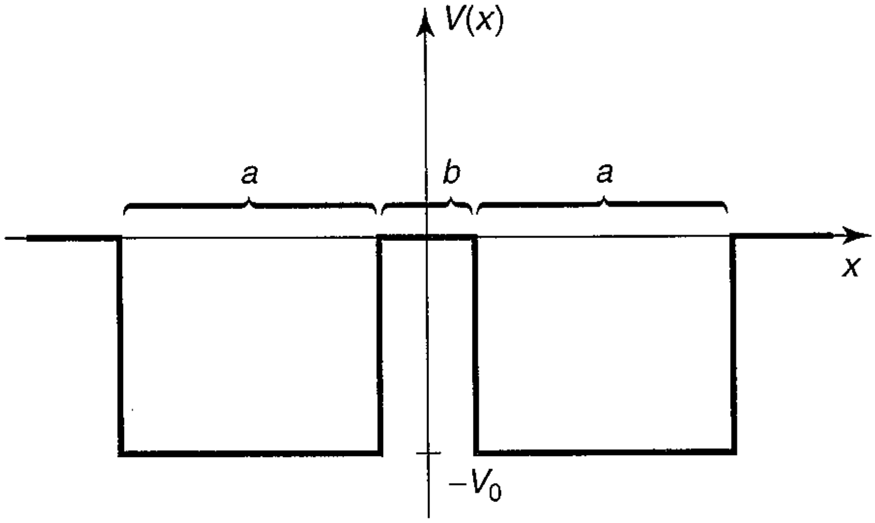
2. Het systeem wordt op $t = 0$ in een toestand gebracht waarbij frequente metingen van de dynamische variabele A steeds de waarde a_1 opleveren.

   (a) Wat is voor deze toestand de verwachtingswaarde van de dynamische variabele A op een arbitrair tijdstip t?

   (b) Welke informatie heb je over de verwachtingswaarde van de energie voor deze toestand op een arbitrair tijdstip t?

OEFENING 3 (5 PUNTEN)

Opgelet: dit is een probleem dat je KWALITATIEF moet oplossen. Je hoeft geen expliciete berekeningen door te voeren.



De dubbele vierkante put is een vrij primitief model voor de potentiaal van een elektron in een diatomische molecule. We beschouwen de dubbele vierkante put zoals het hierboven geschetst wordt. We veronderstellen dat V_0 en a groot genoeg zijn zodat het systeem meer dan één gebonden toestand bezit.

1. Schets de grondtoestand en de eerste aangeslagen toestand van het systeem voor de specifieke gevallen (i) $b = 0$, (ii) $b \approx a$ en (iii) $b \gg a$. Verantwoord de keuzes die je maakt. Bij deze vraag is het belangrijk dat je de relevante punten op de assen van je figuren aanduidt.

2. Wat gebeurt er met de energie E_0 van de grondtoestand en de energie E_1 van de eerste aangeslagen toestand wanneer bij vaste V_0 en a de parameter b varieert tussen 0 en $+\infty$? Je kunt verondestellen dat de diepte van de potentiaal V_0 zeer groot is (of $V_0 \to \infty$). Schets $E_0(b)$ en $E_1(b)$ als functie van b op dezelfde grafiek. Verantwoord de keuzes die je maakt.