Examen Kwantummechanica II

2012-2013, eerste zittijd, 3de Bachelor Fysica en Sterrenkunde, 25 januari 2013

Theorie

Vraag 1

Geef de afleiding van de radiële golfvergelijking. Herschijf deze als een eendimensionale Schrödinger-vergelijking en bespreek. Leid het gedrag af bij kleine r.

Vraag 2

Leid de Schrödingervergelijking af voor een deeltje in een elektromagnetisch veld. Bespreek het ijkprincipe. Gegeven zijn,

$$\vec{F} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c}\right),$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Oefeningen

1. Positronium

Beschouw een positronium deeltje, dit is een gebonden toestand van een elektron en een positron (beide spin 1/2 deeltjes) in een magnetisch veld **B**. Een goede benadering voor de effectieve Hamiltoniaan voor de spinvrijheidsgraden is gegeven door

$$\hat{H} = A\hat{\mathbf{S}}^{(1)}.\hat{\mathbf{S}}^{(2)} + \frac{e}{mc}\mathbf{B}.\left(\hat{\mathbf{S}}^{(1)} - \hat{\mathbf{S}}^{(2)}\right)$$

waarbij index 1 slaat op het elektron en 2 op het positron, A is een constante en $\hat{\mathbf{S}}^{(1)}$ en $\hat{\mathbf{S}}^{(2)}$ zijn de bijhorende spinoperatoren,

$$\hat{\mathbf{S}}_x^{(1)} = \frac{\hbar}{2}\sigma_x^{(1)}$$

en analoog voor y, z en het positron. Het magnetisch veld mag langs de z-as verondersteld worden.

(a) Een operator $\hat{O}$ is een constante van beweging indien hij niet verandert onder de Heisenberg bewegeningsvergelijkingen. Het is eenvoudig in te zien dat dit waar is als en slechts als $\hat{O}$ commuteert met de Hamiltoniaan $\hat{H}$. Onderzoek welke van de operatoren

$$\left(\hat{\mathbf{S}}^{(1)}\right)^2, \quad \left(\hat{\mathbf{S}}^{(1)} + \hat{\mathbf{S}}^{(2)}\right)^2, \quad \hat{S}_z^{(1)} + \hat{S}_z^{(2)}.$$

constanten zijn van de beweging.

(b) Zoek de eigenwaarden en eigenfuncties van $\hat{H}$. Specifieer duidelijk of je in een product basis werkt, of in een gekoppelde basis.

(c) Bepaal de tijdsevolutie $|\psi(t)\rangle$ van de toestand die op $t = 0$ in de product basis gegeven is door $|\psi(0)\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle$.

2. Lineaire Perturbaties

We beschouwen een lineaire storing $\lambda\hat{V} = \lambda e\hat{x}$, met λ klein en e de fundamentele lading, op de harmonische oscillator,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \lambda e\hat{x}.$$

Herinner je de creatie-operator $\hat{a}^\dagger$ en de bijhorende annihilatie-operator $\hat{a}$ die we invoerden om de harmonische oscillator algebraïsch op te lossen.

(a) Schrijf $\hat{x}$ met behulp van de creatie-en annihilatieoperatoren $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$. Herinner je hiervoor dat

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right).$$

(b) Bereken voor alle $m, n \in \mathbb{N}$ de uitdrukking

$$\langle\psi_m|\hat{V}|\psi_n\rangle$$

Hierbij is $|\psi_0\rangle$ de grondtoestand van de harmonische oscillator en zijn $|\psi_m\rangle$ de eigentoestanden die horen bij de hogere energiewaarden. Gebruik de uitdrukking voor $\hat{x}$ die je in (a) vond en de algebraïsche relaties

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1, \quad \hat{a}|\psi_0\rangle = 0, \quad \hat{a}|\psi_n\rangle = \sqrt{n}|\psi_{n-1}\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\psi_{n+1}\rangle.$$

(c) Bepaal de eerste en tweede orde correctie op het laagste energieniveau.

We beschouwen nu opnieuw een lineaire perturbatie op een ander, eendimensionaal, systeem en zullen dit systeem bestuderen met de variationele methode. We beginnen met een vrij deeltje, zodat de Hamiltoniaan enkel de kinetische energie bevat. We beschouwen nu volgende perturbatie,

$$V(x) = eEx \text{ voor } x > 0 \quad \text{en} \quad V(x) = \infty \text{ voor } x \leq 0.$$

Omdat de potentiaalberg oneindig groot is voor $x \leq 0$ is dit verboden gebied. Om de laagste energie van het systeem, met volledige Hamiltoniaan

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}$$

te vinden, gebruiken we de variationele golfvergelijkingen

$$\psi_b(x) = Axe^{-bx} \text{ voor } x > 0 \quad \text{en } \psi_b(x) = 0 \text{ voor } x \leq 0.$$

(d) Leg uit waarom dit een fysisch zinvolle variationele klasse is door het gedrag in de oorsprong en voor $x \to \infty$ te bespreken. Bereken de normalisatiefactor A.

(e) Bepaal de verwachtingswaarde van de energie voor deze golffuncties.

(f) Bereken de laagste verwachtingswaarde van de energie, $\langle\psi_b|\hat{H}|\psi_b\rangle$ die met deze golffuncties bereikt wordt.

Om het rekenwerk te vergemakkelijken kan je gebruik maken van de gamma functie,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt = (n-1)!$$

voor $n = 1, 2, \ldots$ maar dit is niet noodzakelijk.