**Lineaire Algebra & Analytische Meetkunde II**
Eerste Bachelor Wiskunde

Bart De Bruyn, Koen Thas — Bert Seghers

13 juni 2013, 8:30

1. (a) Definieer het begrip *affiene ruimte* (van dimensie $d \in \mathbb{N}$ over een veld $\mathbb{K}$) via nevenklassen. Geef tevens de definitie van *axiomatisch affien vlak*.

   (b) Beschouw een affiene ruimte van dimensie $2$ over een veld $\mathbb{K}$. Toon aan dat deze ruimte een axiomatisch affien vlak is.

   (c) In deze vraag is $\mathscr{A}$ een affiene ruimte, gehecht aan een $\mathbb{K}$-vectorruimte $V$ (met $\mathbb{K}$ een veld). Beantwoord de volgende vragen met "waar" of "vals", en motiveer je antwoord.

   (1) De homothetieën van $\mathscr{A}$ vormen een deelgroep van de dilataties van $\mathscr{A}$.

   (2) De dilataties van $\mathscr{A}$ vormen een deelgroep van de affiene afbeeldingen van $\mathscr{A}$.

2. (a) Onderstel dat $\mathbb{K}$ een veld is van karakteristiek verschillend van $2$, waarvan elk element een kwadraat is. Toon aan dat elke twee niet-ontaarde kwadratische vormen equivalent zijn.

   (b) Definieer de termen *hyperbolisch vlak* en *hyperbolische ruimte*.

   (c) Onderstel dat $\mathbb{K}$ een veld is van karakteristiek verschillend van $2$, stel $V = V(2, \mathbb{K})$, en onderstel dat $(V, q)$ een hyperbolisch vlak is. Toon aan dat $q \sim x^2 - y^2$.

3. (a) Toon aan dat elk veldautomorfisme van $\mathbb{R}$ triviaal is.

   (b) Als $A$ een Hermitische $(n \times n)$-matrix is over $\mathbb{C}$, toon dan aan dat er een unitaire $(n \times n)$-matrix $D$ bestaat zodat $D^{-1}AD$ een diagonaalmatrix is.

   (c) (1) Wat verstaat men onder een *isometrie* van een Hermitische ruimte? Hoe kan men aan de hand van de matrixvoorstellingen zien dat een bepaalde lineaire transformatie een isometrie is?

   (2) Wat verstaat men onder een *unitaire ruimte*?

   (3) Wat verstaat men onder het *radicaal* van een Hermitische ruimte?

**Lineaire Algebra & Analytische Meetkunde II**
Eerste Bachelor Wiskunde

Bart De Bruyn, Koen Thas — Bert Seghers

13 juni 2013, 14:00

1. Zij $n \geq 1, q \geq 3$ en beschouw in $\mathbf{AG}(3n, q)$ een $n$-dimensionale deelruimte $A$ en een $2n$-dimensionale deelruimte $B$.
   - Hoeveel kwalitatief verschillende onderlinge liggingen zijn er mogelijk voor $A$ en $B$? (Noem twee mogelijke liggingen kwalitatief verschillend als hun span of doorsnede een andere dimensie hebben.)
   - Stel nu dat ze snijden in een affien punt $p$.
     - Hoeveel rechten snijden $A \cup B$ enkel in $p$?
     - Hoeveel rechten zijn disjunct van $A$ en snijden $B$ in precies één punt?
     - Hoeveel rechten snijden $A \cup B$ in precies twee affiene punten?
     - Hoeveel rechten zijn disjunct van zowel $A$ als $B$? (niet uitwerken)

2. Beschouw $\mathbf{AG}(3, \mathbb{Q})$ met een vast referentiesysteem waartegenover de punten coördinaten krijgen. Zij $\Delta$ de driehoek door de hoekpunten $a\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-1\end{smallmatrix}\right)$, $b\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ en $c\left(\begin{smallmatrix}0\\-1\\1\end{smallmatrix}\right)$. Beschouw ook de volgende affiene afbeelding, die afhangt van vier parameters.

$$f : \mathbf{AG}(n, \mathbb{Q}) \to \mathbf{AG}(n, \mathbb{Q}) : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \xi & \zeta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta \\ 1/3 \\ \tau \end{pmatrix}$$

   - Bepaal $\gamma$ zodanig dat $p\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\\gamma\end{smallmatrix}\right)$ een uniek stel barycentrische coördinaten heeft t.o.v. $a, b$ en $c$.
   - Bepaal $\eta, \zeta$ en $\xi$ (in functie van $\tau$) zodat de affiene afbeelding $f$ het vlak waarin $\Delta$ ligt, verzamelingsgewijze vasthoudt.
   - Voor welke waarden van $\tau$ beeldt $f$ het zwaartepunt van $\Delta$ af op een punt in het binnengebied van $\Delta$? Op welke zijden wordt het zwaartepunt afgebeeld voor de grenswaarden van het interval voor $\tau$ dat je bekomt?

*ZOZ*

3. In deze opgave beschouwen we bilineaire vormen op de vectorruimte der bilineaire vormen. Zij $V$ een vectorruimte van dimensie $n$ over een veld $\mathbb{K}$. Zij $(e_1, \ldots, e_n)$ een basis voor $V$. We noteren de coördinaten van vectoren tegenover deze basis met een onderindex, dus $u = \sum_i u_i e_i$.

   - Definieer voor $1 \leq i, j \leq n$ de bilineaire vorm $f_{ij} : V \times V \to \mathbb{K} : (u, v) \mapsto u_i v_j$. Bewijs dat $\{f_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$ een basis is voor $\mathrm{Bil}(V)$.

   - Stel $n = 2$. Zijn $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, d_{11}, d_{12}, d_{21}$ en $d_{22}$ constanten uit $\mathbb{K}$, allen niet 0. Beschouw de afbeelding

     $$\begin{aligned} F : \mathrm{Bil}(V) \times \mathrm{Bil}(V) &\to \mathbb{K} \\ (a, b) &\mapsto a(c_{11}e_1 + c_{12}e_2, c_{21}e_1 + c_{22}e_2) \cdot b(d_{11}e_1 + d_{12}e_2, d_{21}e_1 + d_{22}e_2) \end{aligned}$$

     Toon aan dat $F$ een bilineaire vorm is.

   - Bepaal de rang en de discriminant van $F$.

4. Zij $q$ een kwadratische vorm op een reële vectorruimte $V(n, \mathbb{R})$. Zijn $v$ en $w$ twee vectoren zodat $q(v) > 0$ en $q(w) < 0$.

   - Bewijs dat $v$ en $w$ lineair onafhankelijk zijn.

   - Bewijs dat er een vector $u \neq 0$ in het vectorvlak opgespannen door $v$ en $w$ ligt, waarvoor $q(u) = 0$.

   - Bewijs dat de bilineaire vorm, geassocieerd aan een reële, anisotrope kwadratische vorm, positief- of negatief-definiet is.