Numerieke Analyse 2012–2013. Eerste examenperiode.

OEFENINGEN

1. Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ met $n = 2m$ even, met een nulblok in de positie $[m+1, 2m] \times [1, m]$ ($a_{i,j} = 0$ voor $m+1 \leq i \leq 2m$ en $1 \leq j \leq m$). Neem aan dat A een rechtstreekse LU-factorisatie bezit (m.a.w. dat de pivotelementen nooit nul worden).

   a) Herschrijf het **Algoritme** *LU-factorisatie* voor zulke matrices, zodanig dat er geen overbodige berekeningen worden uitgevoerd (m.a.w. hou rekening met de posities waar reeds een nulelement staat).

   b) Hoeveel elementaire rekenkundige bewerkingen vereist deze factorisatie? (Druk alles uit in functie van m eerder dan in functie van n.)

2. Zij $a > 0$. Dan kan $\ln(a)$ iteratief berekend worden door de Newton-Raphson-methode toe te passen op de functie $f(x) = e^x - a$. Stel de iteratiemethode op, en analyseer voor welke startwaarden x_0 de methode convergeert naar $\ln(a)$.

3. Neem aan dat de functie f onbeperkt afleidbaar is, en er een vast getal U bestaat zodat $|f^{(m)}(x)| < U$ (voor elke positieve m) voor $x \in [a, b]$. Beschouw de interpolatieveelterm $p_n(x)$ voor f in het interval $[a, b]$, t.o.v. interpolatiepunten $x_k = a + kh$, met $k = 0, 1, \ldots, n$ en $h = \frac{b-a}{n}$. Toon aan dat voor elke $x \in [a, b]$ geldt:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{h^{n+1}U}{4(n+1)}.$$

4. Beschouw de volgende kwadratuurformule :

$$\int_0^2 f(x)dx \approx I(f) = Af(0) + Bf''(\alpha) + Cf(2).$$

   a) Bepaal de oplossing(en) voor A, B, C en α zodat de GVAN zo hoog mogelijk wordt. Wat is de GVAN?

   b) Bereken de Peano-kern $K(t)$ voor de aldus bekomen kwadratuurformule.

   c) Indien $K(t)$ een vast teken heeft in $[0, 2]$, stel dan een expliciete uitdrukking op voor de procesfout van de kwadratuurformule.

Voor oefening 1(b) kan je natuurlijk gebruik maken van de gekende formules

$$\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$