Projectieve Meetkunde
Tweede Bachelor Wiskunde
Bart De Bruyn en Koen Thas
24 juni 2013, 8:30

Eerste gedeelte

(1) Formuleer en bewijs de stelling van Pappus voor projectieve vlakken over velden. Duid de plaatsen in het bewijs aan waar op de commutativiteit van de vermenigvuldiging gesteund werd.

(2) Onderstel dat β een Hermitische polariteit is van het projectief vlak $\mathrm{PG}(V)$, waarbij V een 3-dimensionale vectorruimte is over een veld $\mathbb{F}$, en noem H de verzameling van de absolute punten van β. Noem θ het automorfisme van $\mathbb{F}$ geassocieerd aan β, en definieer $M = \{k \in \mathbb{F} \mid k^\theta + k = 0\}$. Toon aan dat $M \neq \mathbb{F}$. Als $H \neq \emptyset$, toon dan aan dat er een $c \in \mathbb{F} \setminus M$ bestaat zodat

$$H = \{(0,0,1)\} \cup \{(1, y, y^{1+\theta} + ck) \parallel y \in \mathbb{F} \text{ en } k \in M\}$$

ten opzichte van een bepaalde goed gekozen basis van V.

(3) Onderstel dat $\mathbb{F}$ een veld is van karakteristiek 2, en dat $a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}$ elementen zijn van $\mathbb{F}$. Geef (met bewijs) een nodige en voldoende voorwaarde waaraan $a_{00}, \ldots, a_{22}$ moeten voldoen opdat het kwadratisch polynoom $F(X_0, X_1, X_2) = \sum_{0 \leq i \leq j \leq 2} a_{ij} X_i X_j$ absoluut reduciebel zou zijn.

(4)
- Onderstel dat V_1 en V_2 twee vectorruimten zijn van (dezelfde) dimensie $n \geq 2$ over de respectievelijke velden $\mathbb{F}_1$ en $\mathbb{F}_2$. Geef de definitie van een isomorfisme tussen $\mathrm{PG}(V_1)$ en $\mathrm{PG}(V_2)$.
- Geef de definitie van een geraamte van $\mathrm{PG}(V)$, waarbij V een vectorruimte is van dimensie $n \geq 2$ over een veld $\mathbb{F}$. Geef voor elk van de groepen $\mathsf{PGL}(V)$, $\mathsf{PSL}(V)$, $\mathsf{P\Gamma L}(V)$ aan of deze transitief / scherp transitief werkt op de verzameling van de geraamten van $\mathrm{PG}(V)$? 6 antw
- Welke deelruimten liggen er op de Klein kwadriek? Geef voor elk van deze deelruimten aan welke verzameling rechten hiermee correspondeert (via de Klein correspondentie).

Tweede gedeelte

(1) Beschouw de projectieve vlakken $\mathcal{P}_1$ en $\mathcal{P}_2$. In $\mathcal{P}_i$ met $i \in \{1,2\}$ beschouwen we een bepaalde rechte L_i. Toon aan dat de affiene vlakken $\mathcal{P}_1^{L_1}$ en $\mathcal{P}_2{}^{L_2}$ isomorf zijn a.s.a. er een isomorfisme α van $\mathcal{P}_1$ op $\mathcal{P}_2$ bestaat waarvoor $L_1^\alpha = L_2$.

(2) Definieer het begrip *projectief translatievlak*. Geef tevens de definitie van *affien translatievlak*. Beschouw nu een projectief translatievlak met translatierechte L en translatiegroep T, en kies een willekeurig punt x niet op L. De rechten door het punt x noemen we M_i met $i \in I$ en $|I| = |L|$; tevens definiëren we $T_i := T_{M_i}$ voor alle $i \in I$.

(i) Toon aan dat $T_iT_j = T$ voor alle $i, j \neq i$ in I.

(ii) Toon aan dat $\cup_{i \in I} T_i = T$.

(iii) Kan je verschillende elementen a, b vinden in T waarvoor $ab \neq ba$? Motiveer/bewijs je antwoord.