Lineaire Algebra & Analytische Meetkunde II

Eerste Bachelor Wiskunde, `tweede zittijd`

Bart De Bruyn, Koen Thas — Bert Seghers

4 september 2013, 8:30

Vraag 1.

(a) Definieer $\mathbf{AG}(1, \mathbb{K})$, met $\mathbb{K}$ een veld.

(b) Leg het verschil uit tussen een axiomatisch *affien* vlak en een axiomatisch *projectief* vlak.

(c) In deze vraag is $\mathscr{A}$ een affiene ruimte, gehecht aan een $\mathbb{K}$-vectorruimte V (met $\mathbb{K}$ een veld). Beantwoord de volgende vragen met "waar" of "vals", en motiveer je antwoord.

(1) De unie van twee affiene deelruimten van $\mathscr{A}$ is steeds opnieuw een affiene deelruimte.

(2) Elke affiene afbeelding van $\mathscr{A}$ is een dilatatie van $\mathscr{A}$.

(3) Elk automorfisme van $\mathscr{A}$ houdt ofwel (tenminste) een punt, ofwel (tenminste) een rechte vast.

Vraag 2.

(a) Definieer de termen *bilineaire vorm* en *kwadratische vorm* op een vectorruimte.

(b) Formuleer en bewijs de klassering van kwadratische vormen over $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$.

(c) Omschrijf de klassering van kwadratische vormen over eindige velden in oneven karakteristiek (zonder bewijzen te geven).

Vraag 3.

(a) Onderstel dat f een Hermitische vorm is op $V = V(n, \mathbb{K})$, waarbij $\mathbb{K}$ een veld is en $n \in \mathbb{N}^\times$. Toon dan aan dat er een geordende basis B bestaat zodat $M_B(f)$ een diagonaalmatrix is.

(b) Beschouw een Hermitische vorm f op $V(n, \mathbb{K})$, waarbij $\mathbb{K}$ een veld is en $n \in \mathbb{N}^\times$. Noem α het involutorisch automorfisme van $\mathbb{K}$ geassocieerd aan f. Als B en B' twee geordende basissen zijn van V, welk verband bestaat er dan tussen de matrixvoorstellingen $M_B(f)$ en $M_{B'}(f)$? (Geef eveneens een bewijs van dit verband.)

(c) (1) Geef de definitie van *unitaire matrix* en *unitaire lineaire transformatie*. Wat verstaat men onder het *radicaal* van een Hermitische ruimte?

(2) Definieer de termen *adjunct afbeelding* van een lineaire afbeelding van een inproductruimte en *zelf-adjuncte lineaire afbeelding* van een inproductruimte. Hoe kan men aan de hand van een matrixvoorstelling zien dat een lineaire afbeelding zelf-adjunct is? Hoe noem je een zelf-adjuncte lineaire afbeelding als het onderliggende veld $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) is?

Lineaire Algebra & Analytische Meetkunde II
Eerste Bachelor Wiskunde

Bart De Bruyn, Koen Thas — Bert Seghers

4 september 2013, 14:00

1. Zij π een vast vlak van $\mathbf{AG}(n, q)$ en $2 \leq k \leq n-1$.
   - Hoeveel k-dimensionale deelruimten van $\mathbf{AG}(n, q)$ snijden π in (enkel) een rechte?
   - Hoeveel k-dimensionale deelruimten van $\mathbf{AG}(n, q)$ zijn zwak parallel met π?

2. Bewijs dat er voor elke twee affiene referentiesystemen $(r, a_1, \ldots, a_n)$ en $(s, b_1, \ldots, b_n)$ van $\mathbf{AG}(n, \mathbb{K})$ een inverteerbare affiene transformatie is die de ene op de andere afbeeldt.

3. Zij een affien refentiesysteem van $\mathbf{AG}(2, \mathbb{K})$ gegeven, met $\operatorname{kar} \mathbb{K} \neq 2, 3$. Bepaal de barycentrische coördinaten van het punt met affiene coördinaten $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ t.o.v. de drie punten $\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right)$. Bewijs voor een willekeurige driehoek Δ in $\mathbf{AG}(2, \mathbb{K})$, dat Δ zelf en de driehoek gevormd door de middens van de zijden van Δ met elkaar te verbinden, hetzelfde zwaartepunt hebben. *Hint: kies een geschikt referentiesysteem op basis van Δ.*

4. Wat zijn de mogelijke onderlinge liggingen van twee vlakken in $\mathbf{AG}(n, \mathbb{K})$, met $n \geq 5$?

5. Bewijs, voor twee eindigdimensionale reflexieve bilineaire ruimten (V, f) en (W, g):
$$\operatorname{rad}(V \oplus W, f \oplus g) = \operatorname{rad}(V, f) \oplus \operatorname{rad}(W, g)$$

6. Zij $P_n(\mathbb{R})$ de vectorruimte van reële veeltermen van graad ten hoogste n. Zij $t \in \mathbb{R}$ een vaste scalair. Beschouw de afbeelding
$$\begin{aligned} F : P_n(\mathbb{R}) \times P_n(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto a(t) \cdot b'(1) \end{aligned}$$
Bewijs dat F een bilineaire vorm is en bepaal rang en discriminant van F. *Hint: Gebruik de standaardbasis $(x^n, \ldots, x, 1)$ voor $P_n(\mathbb{R})$.*

7. Bewijs dat equivalente kwadratische vormen dezelfde scalairenverzameling representeren.

8. Zij V een eindigdimensionale vectorruimte en f een niet-ontaarde bilineaire vorm op V. Bewijs:
$$\forall b \in \operatorname{Bil}(V) : \exists \varphi \in \operatorname{Hom}(V) : \forall v, w \in V : b(v, w) = f(\varphi(v), w)$$