Examen Projectieve Meetkunde, 04 september 2013

(1) Formuleer en bewijs de stelling van Desargues voor projectieve vlakken over velden.

(2) Onderstel dat V een 2-dimensionale vectorruimte is over een veld $\mathbb{F}$. Beschouw punten p_1, p_2, p_3 en p_4 in $\mathsf{PG}(V)$ waarbij p_1, p_2 en p_3 twee aan twee verschillend zijn. Is (u_i, v_i) met $i \in \{1,2,3,4\}$ een stel homogene coördinaten van p_i t.o.v. een vaste basis van V, toon dan aan dat

$$(p_1, p_2; p_3, p_4) = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_4 & v_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_4 & v_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}}.$$

(3) Onderstel dat C een absoluut irreduciebele kegelsnede is van het projectieve vlak $\mathsf{PG}(V)$, waarbij V een vectorruimte van dimensie 3 is over een veld $\mathbb{F}$ van karakteristiek 2. Toon dan het volgende aan:

- Als $C \neq \emptyset$, dan is C gelijkmachtig met de verzameling der punten op een rechte.
- Als $\mathbb{F} \cong \mathsf{GF}(q)$, q even, dan is $|C| = q + 1$.

(4) (a) Onderstel dat V een vectorruimte is van dimensie tenminste twee over een veld $\mathbb{F}$. Wat verstaat men onder de *projectieve groep*, de *kleine projectieve groep* en de *unimodulaire groep* van de projectieve ruimte $\mathsf{PG}(V)$? Wanneer worden twee puntenverzamelingen van $\mathsf{PG}(V)$ *projectief equivalent* genoemd?

(b) Onderstel dat V een vectorruimte is van dimensie $n \geq 3$ over een veld $\mathbb{F}$. Geef een overzicht van de polariteiten die kunnen bestaan in de projectieve ruimte $\mathsf{PG}(V)$. Hoe kun je de verschillende soorten herkennen aan de hand van een matrixvoorstelling. Welke van deze polariteiten kunnen voorkomen in het geval dat $\mathsf{PG}(V)$ een projectief vlak is?

(c) Welke deelruimten liggen er op de Klein kwadriek? Geef voor elk van deze deelruimten aan welke verzamelingen rechten hiermee correspondeert (via de Klein correspondentie).

(5) (a) Onderstel dat $\mathcal{P}$ een projectief vlak is. Voer coördinaten in voor $\mathcal{P}$ (voeg een verklarende tekening toe!).

(b) Definieer de begrippen *ternaire ring* en *planaire ternaire ring.*

(c) Beschouw een projectief vlak $\mathcal{P}$ dat gecoördinatiseerd wordt aan de hand van een verzameling R. Indien (R, T) de corresponderende ternaire ring is, bewijs dan de volgende eigenschappen:

(i) $T(a, 0, c) = T(0, b, c) = c$ voor alle $a, b, c \in R$;

(ii) $T(a, 1, 0) = T(1, a, 0) = a$ voor alle $a \in R$.

7

Examen Projectieve Meetkunde: oefeningen

2de bachelor Wiskunde

woensdag 4 september 2013

It's mercy, compassion and forgiveness I lack. Not rationality.

The Bride in *Kill Bill: Volume 1*

Oefening 1. Beschouw een veld $\mathbb{F}$ en onderstel dat $a, b, c, d, e \in \mathbb{F}$ en dat θ een veldautomorfisme is van $\mathbb{F}$. Noem β de afbeelding van de puntenverzameling van $\mathrm{PG}(3, \mathbb{F})$ naar de vlakkenverzameling van $\mathrm{PG}(3, \mathbb{F})$ die het punt (x_0, x_1, x_2, x_3) afbeeldt op het vlak met vergelijking $a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = 0$, waarbij $(a_0, a_1, a_2, a_3)^t = A.(x_0, x_1, x_2, x_3)^t$, met

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & a^\theta \\ 1 & b & e^\theta & 0 \\ c & -e & 0 & 1 \\ b & d & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Geef de nodige en voldoende voorwaarden op a, b, c, d, e, $\mathbb{F}$ en θ opdat β een symplectische polariteit in $\mathrm{PG}(3, \mathbb{F})$ zou bepalen. (Los iedere vergelijking die je vindt, ook op!)

(ii) Stel $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Geef de nodige en voldoende voorwaarden op a, b, c, d, e en θ opdat β een pseudopolariteit in $\mathrm{PG}(3, \mathbb{C})$ zou bepalen. Stel nu θ de complexe toevoeging in $\mathbb{C}$. Geef de nodige en voldoende voorwaarde op a, b, c, d en e opdat β een hermitische polariteit in $\mathrm{PG}(3, \mathbb{C})$ zou bepalen. (Los iedere vergelijking die je vindt, ook op!)

Stel $a = b = c = d = e = 0$, $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ met $q = p^h$, $p \neq 2$ priem, en $\theta = \mathbb{1}$. Dan is β een polariteit. Noteer de verzameling van absolute punten van β als Ω.

(iii) Van welk type is de polariteit β? Zij α het vlak $X_0 = 0$. Bepaal de punten in de doorsnede van Ω met α.

(iv) We zeggen dat een rechte bevat is in Ω als alle punten van de rechte in Ω bevat zijn. Ga na dat Ω precies de volgende $2q + 2$ rechten bevat: $X_0 = X_2 = 0$, $X_0 = X_3 = 0$, $aX_0 + X_2 = X_1 - aX_3 = 0$, voor alle $a \in \mathbb{F}_q$ en $aX_0 + X_3 = X_1 - aX_2 = 0$, voor alle $a \in \mathbb{F}_q$. Noem de verzameling van deze rechten $\mathcal{L}$.

(v) Bepaal het beeld van de rechten in $\mathcal{L}$ onder de Klein correspondentie. Geef ook een meetkundige omschrijving van dit beeld.

Oefening 2. In $\mathrm{PG}(3, q^2)$, q een oneven priemmacht, wordt de puntenverzameling Γ gegeven door de vergelijking $X_0X_3 = X_2^2$, en wordt de puntenverzameling Δ gegeven door de vergelijking $X_0^{q+1} - 2X_2^{q+1} + X_3^{q+1} = 0$.

(i) Hoeveel punten bevat Γ? Hoeveel punten bevat Δ?

(ii) Hoeveel punten bevat $\Gamma \cap \Delta$? Geef een beschrijving van de verzameling $\Gamma \cap \Delta$.

(iii) Zij π een vlak in $PG(3, q^2)$ dat niet door het punt $(0, 1, 0, 0)$ gaat. Zij Q een punt van $\Gamma \cap \Delta \cap \pi$. Toon aan dat er een unieke raaklijn door Q aan $\Gamma \cap \pi$ in π is; toon ook aan dat er een unieke raaklijn door Q aan $\Delta \cap \pi$ in π is. Bewijs dat deze twee raaklijnen gelijk zijn.

Hint: bekijk het vlak $X_1 = 0$.

Oefening 3. Beschouw de projectieve ruimte $PG(n, q)$. Zij $\mathcal{S}$ een verzameling niet-ledige deelruimten die $PG(n, q)$ zelf niet bevat, zodat $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U = PG(n, q)$ en zodat voor alle $U, V \in \mathcal{S}$ geldt dat $U \cap V = \emptyset$.

(i) Bewijs: als $\mathcal{S}$ een hypervlak bevat, dan is $|\mathcal{S}| = q^n + 1$.

(ii) Bewijs dat $|\mathcal{S}| \geq q^\beta + 1$ met $\beta = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$.