Analyse uno

Ludovic Marchand

December 18, 2012

1 Inleiding

1.1 Notaties en definities

De beperking (of restrictie) van f tot C (= deel van D_f), is de afbeelding met C als domein en $f(x)$ als functiewaarde in $x \in C$.

Voc 1 *verzameling, (strikte) inclusie* $\subseteq$ *, domein* D_f *, beeld* $f(D_f)$ *, niet-negatieve functie*

1.2 Elementen vd logica

Negatie $\neg$ ($\forall \Rightarrow \exists$ & $\leq \Rightarrow >$), disjunctie $\vee$, conjunctie $\wedge$
Indien implicatie $P \Rightarrow Q$ waar is, dan is haar contrapositie $\neg Q \Rightarrow \neg P$ (dus NIET $\Leftarrow$). Men zegt hier dat P voldoende is voor Q & Q nodig is voor P

Voc 2 *triviaal: hoewel juist, niet de moeite om bij stil te staan*

2 Getallen

2.1 Natuurlijke $\mathbb{N}$, gehele $\mathbb{Z}$ en rationale $\mathbb{Q}$ getallen

Axioma 1 *(natuurlijke getallen): Als P(n) een formule is die afhangt van* $n \in \mathbb{N}$ *en als volgende 2 formules waar zijn: (i) P(0) (ii) P(n)* $\Rightarrow$ *P(n + 1)* $\forall n$ *dan is de formule P(n) waar voor alle* $n \in \mathbb{N}$

Stelling 2.1 *Elke nietlege verzameling van natuurlijke getallen heeft een kleinste element.*

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ & ($\mathbb{Q}$,<,+,$\bullet$) zijn geordende velden.
$\rightsquigarrow \neq$ rekenregels in die velden waaronder driehoeksongelijkheid:

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

$\mathbb{Q}$ bevat veel 'gaten'; hier één:

Stelling 2.2 *Er bestaat geen enkel rationaal getal waarvan het kwadraat 2 is.*

Voc 3 *volledige inductie*

2.2 Reële getallen $\mathbb{R}$

2.2.1 Axioma's vd reële getallen

eerst enkele definities:

Definitie 2.3 *Een bovengrens van* $A \subseteq \mathbb{R}$ *is een* $b \in \mathbb{R}$ *met*

$$(\forall a \in A)(a \leq b)$$

Definitie 2.4 *Een maximum (of grootste elt) is een bovengrens v A die tot A behoort. uniek bepaalt!*

Definitie 2.5 *Een supremum is de kleinste bovengrens, eventueel het maximum*

$\Rightarrow$ analoog voor ondergrens, minimum en infimum

Stelling 2.6 *Een verzameling is begrensd als ze zowel naar onder/boven begrensd is.*

en dan nu de 2 Axioma's:

Axioma 2 *(*$\mathbb{R}$,<,+,$\bullet$*) is een geordend veld (*$\Rightarrow$ *bevat* $\mathbb{Q}$*)*

Axioma 3 *(Supremumprincipe) Elke nietlege verzameling reële getallen die naar boven begrensd is, heeft een supremum.*

Omdat we het Supremumprincipe bij het rekenen met decimale ontw niet onder die vorm gebruiken:

Stelling 2.7 *De verzameling van alle decimale ontwikkelingen voldoet aan het supremumprincipe. (Zo is* $\sqrt{2} = sup\{1; 1.4; 1.41...\}$*)*

Stelling 2.8 *Bij elke* $a \in \mathbb{R}$ *bestaat er een* $n \in \mathbb{N}^+$ *met* $n > a$

Stelling 2.9 *Als* $a, b \in \mathbb{R}$ *met* $a < b$ *,*
dan bestaat er een rationaal getal $\frac{p}{q}$ *waarvoor* $a < \frac{p}{q} < b$

Gevolg 2.10 *Tussen elke 2 verschillende reële getallen liggen oneindig veel rationale getallen*

Definitie 2.11 *Een oneindige verzameling is aftelbaar als zij bijectief is met* $\mathbb{N}$

2.2.2 Eig van sup en inf

Stelling 2.12 *(kenmerkende eig van sup resp inf) Het reëel getal* ω *resp* α *is dan en slechts dan het sup resp inf van X als de volgende eig gelden:*

- *voor elke* $x \in X$ *is* $x \leq \omega$
- *voor elke* $\xi > 0$ *bestaat er een* $x_\xi \in X$ *met* $\omega - \xi < x_\xi$
- *voor elke* $x \in X$ *is* $\alpha \leq x$
- *voor elke* $\xi > 0$ *bestaat er een* $x_\xi \in X$ *met* $x_\xi < \alpha + \xi$

Stelling 2.13 *(Infimumprincipe) Elke nietlege verzameling van reële getallen die naar onder begrensd is heeft een infimum.*

Stelling 2.14 *(Rekenregels) zij* $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ *nietleeg en naar boven resp onder begrensd*

- $\forall x \in X$, $\exists y \in Y$ *met* $x \leq y$, *dan is* $supX \leq supY$
  & *als* $y \leq x$, *dan is* $inf Y \leq inf X$.
- *Wordt de verzameling vergroot dan wordt het supremum niet kleiner (blijft gelijk of vergroot), het infimum wordt niet groter*
- *We noteren* $cX := \{cx : x \in X\}$
  Als $c \geq 0$, *dan is* $sup(cX) = csupX \quad \& \quad inf(cX) = c\,infX$
  Als $c \leq 0$, *dan is* $inf(cX) = csupX \quad \& \quad sup(cX) = c\,infX$

Stelling 2.15 *Zijn* $f : D \to \mathbb{R}$ *en* $g : D \to \mathbb{R}$ *twee afbeeldingen met eenzelfde domein, dan is*

- $sup_{\mathrm{D}}(f+g) \leq sup_{\mathrm{D}}f + sup_{\mathrm{D}}g \quad \& \quad inf_{\mathrm{D}}(f+g) \geq inf_{\mathrm{D}}f + inf_{\mathrm{D}}g$

Als $f, g \geq 0$, *dan is ook*

- $sup_{\mathrm{D}}(fg) \leq sup_{\mathrm{D}}f * sup_{\mathrm{D}}g \quad \& \quad inf_{\mathrm{D}}(fg) \geq inf_{\mathrm{D}}f * inf_{\mathrm{D}}g$

Opmerking : de ongelijkheden zijn over het algemeen geen gelijkheden.

Stelling 2.16

- $sup_{\mathrm{D}}f \leq b \;\Leftrightarrow\; (\forall x \in D)(f(x) \leq b)$
- $inf_{\mathrm{D}}f \geq a \;\Leftrightarrow\; (\forall x \in D)(f(x) \geq a)$
- *Is* $|f(x) - f(x')| \leq C$, $\forall x, x' \in D$, *dan is*

$$sup_{\mathrm{D}}f - inf_{\mathrm{D}}f \leq C$$

2.2.3 Reële intervallen

Stelling 2.17 *Er bestaan 9 types intervallen, drie soorten grenzen ([,],∞)*

Definitie 2.18 *Een interval heet compact als het ofwel ledig is ofwel van de gedaante [a,b] met* $a \leq b$ *reële getallen.*

2.3 Complexe getallen $\mathbb{C}$

Definitie 2.19 *Een complex getal z is een koppel reële getallen (x,y) dat men noteert als* $z = x + iy$ *met i de imaginaire eenheid. x = Re z, y = Im z. En zoals voor alle koppels geldt dat ze gelijk zijn als x = x' en y = y'.*

Stelling 2.20 *Het veld* $\mathbb{C}$ *kan onmogelijk geordend worden.*
$\rightsquigarrow$ *Schrijf NOOIT ongelijkheden tussen complexe getallen!!*

Voc 4 $i^2 = -1$, *absolute waarde (modulus = lat. maat), complex vlak, complex toegevoegde (tekenwissel Im)*

3 Reële rijen

3.1 Elementaire theorie

Een reële rij is een afbeelding $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$.
Algemeen beschreven als $x_n = (x_1, x_2 \ldots)$, met n de index van de term x_n

Definitie 3.1 *Convergentie van* (x_n) *naar* $a \in \mathbb{R}$ *als*

$$(\forall\, \xi > 0)(\exists N \in \mathbb{N}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^+)(n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \xi)$$

$$\textit{afgekort:} \quad |x_n - a| < \xi \ \ \textit{zodra} \ \ n \geq N_\xi \quad \rightsquigarrow a - \xi < x_n < a + \xi$$

Indien $x_n \to a$ *dan is a haar limiet en men noteert* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Definitie 3.2 *Divergentie van* (x_n) *naar* $+\infty$

$$(\forall\, M \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N}_{\geq 0})(\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 0})(n \geq N \Rightarrow x_n > M)$$

$$\textit{afgekort:} \quad x_n > M \ \ \textit{zodra} \ \ n \geq N$$

Stelling 3.3 *De limiet van een convergente rij is uniek*

Definitie 3.4 *Een rij is begrensd als ze naar boven en beneden begrensd is maw* $\exists K : |x_n| < K$

Stelling 3.5 *Een convergente rij is begrensd*

Stelling 3.6 *(Insluitstelling): Als* $x_n \leq y_n \leq z_n$ *en* $x_n, z_n \to a$*, dan ook* $y_n \to a$

Stelling 3.7 *Limiet van een som is de som der limieten maw*
als $x_n \to a$*, en* $y_n \to b$ *dan* $x_n \pm y_n \to a \pm b$

Stelling 3.8 *Als* $x_n \to 0$*, en* y_n *is begrensd, dan ook* $x_n y_n \to 0$

Stelling 3.9 *Limiet product is product der limieten maw*
als $x_n \to a, y_n \to b$ *dan gaat* $x_n y_n \to ab$

Stelling 3.10 *absolute waarde limiet is limiet absolute waarde:*
$x_n \to a$*, dan* $|x_n| \to |a|$.

Stelling 3.11 *Als* $x_n \to a \neq 0 \Rightarrow x_n \neq 0$ *vanaf zeker rangnummer en* $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$

Stelling 3.12 *Als* $x_n \geq 0 \forall\, n$ *en* $x_n \to a$*, dan* $a \geq 0$

Stelling 3.13 *Als alle termen van een convergente rij in [a,b] liggen, ligt ook de limiet daarin.*
Dit blijft gelden vanaf een bep rangnummer want $lim x_n = lim x_{n+1}$

3.2 Stelling van Bolzano Weierstrass

Voc 5 *(strikt) stijgend, (strikt) dalend, (strikt) monotone rij*

Stelling 3.14 *Is x_n stijgend en nr boven begrensd $\Rightarrow$ conv met $lim x_n = sup x_n$*

Stelling 3.15 *Elke deelrij van een convergente rij is zelf convergent naar dezelfde limiet als de oorpsronkelijke.*
$\rightsquigarrow$ *een rij, met 2 deelrijen met $\neq$ limieten, is nt convergent.*

Stelling 3.16 *Elke rij heeft een monotone deelrij!!*

Stelling 3.17 *(Bolzano-Weierstrass) Als alle rijtermen in $[a, b]$ liggen, dan bestaat er een deelrij die convergeert naar een punt uit I.*

Stelling 3.18 *(Cauchy) x_n convergeert*
$\Leftrightarrow$ *$(\forall \xi > 0)(\exists N_\xi \in \mathbb{N})$ $(|x_n - x_m| < \xi$ als $n > N_\xi$, $m > N_\xi)$*

Stelling 3.19 *(Stelling vd vernestelde compacte intervallen): Stel een rij van compacte intervallen met de eigenschap: $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \ldots$, dan is $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ niet ledig maw er bestaat een reële ξ die tot alle intervallen behoort. Als bovendien $lim(b_n - a_n) = 0$, dan is die ξ uniek en gelijk aan $lim a_n = lim b_n$*

Stelling 3.20 *(Cantor, 1874)*
Een compact interval is niet aftelbaar, bijgevolg ook $\mathbb{R}$ niet

4 H 3 : Limieten van functies

4.1 Limieten van functies

Definitie 4.1

- *Open bal met middelp $a \in \mathbb{R}$ en straal $R \in \mathbb{R}^+$, $B(a, R)$ (= $]a - R, a + R[$).*
- *Als $\forall R > 0$ geldt dat $B(a, R) \cap V$ oneindig veel eltn heeft*
  $\Rightarrow$ a is ophopingspunt van verz V(waartoe het niet hoeft te behoren).
- *Als $\exists R > 0$ waarvoor $]a - R, a + R[\subseteq V$, dan is die deelverzameling een omgeving van a, en a heet het inwendig punt.*
- *Het inwendige V^0 bestaat uit alle inwendig punten van de verz V.*
- *Is V een omgeving van a, dan is $V \backslash \{a\}$ een doorprikte omgeving.*

Definitie 4.2 *L is de limiet van $f(x)$ voor $x \to a$*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \xi > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \xi)$$

$$\textit{oftewel } \; |f(x) - L| < \xi \; \textit{ zodra } \; 0 < |x - a| < \delta_\xi, \; x \in D$$

Stelling 4.3 *(Rijenkenmerk voor limieten)*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \textit{ rij } \; x_n \to a : \textit{rij } \; f(x_n) \to f(a) = L$$

Gevolg 4.4

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow f(x_n) \to L \; \forall n \in D\backslash\{a\}$$

Stelling 4.5 *Limiet bestaat* $\Leftrightarrow$ *linker en rechterlimiet bestaan en zijn gelijk.*

Stelling 4.6 *(Eigenschap van de limiet)* $(lim_{x\to a} f(x))$ *a bestaat* $\Rightarrow$
$\exists$ *(doorprikte) omgeving :* $f(x)$ *is begrensd.*

Stelling 4.7 *(Eigenschap van de positieve limiet) Als f in a een limiet* $L > 0$
$\Rightarrow \exists$ *doorprikte omgeving :* $f(x) > 0$

Definitie 4.8 *f(x) divergeert naar* $+\infty$ *voor* $x \to a$ *als:*

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M)$$

$$\textit{afgekort} \;\; f(x) > M \;\; \textit{zodra} \;\; 0 < |x - a| < \delta_M, \, x \in D$$

Toepassing 4.9 *(Gedrag op oneindig van nietcnste reële veeltermen)*
Is $n \geq 1 \Rightarrow lim_{+\infty} x^n = +\infty$

- *Is* $a_n > 0$ *dan is* $lim_{+\infty}(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = +\infty$.
- *Is* $a_n < 0$ *dan is* $lim_{+\infty}(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = -\infty$.

Voc 6 *Oneigenlijke limieten*

5 Continuïteit

5.1 Continuïteit in een vast punt

Definitie 5.1 *f(x) is continu in a als* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$$\textit{Dus als } (\forall \xi > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)(= L)| < \xi)$$

$\rightsquigarrow$ Nu volgen enkele **uitgebreide** limstellingen naar continuiteit met $f(a) = L$

Stelling 5.2 *(Rijenkenmerk voor continuïteit) f continu in a* $\Leftrightarrow$
$\forall$ *rij* $x_n \to a$: *rij* $f(x_n) \to f(a) = L$

Stelling 5.3 *Is f continu in a, dan is f begrensd over een omgeving van a.*

Stelling 5.4 *Een reële veeltermfunctie is in elk punt continu.*

Stelling 5.5 *Is f continu in a, is g continu in f(a), dan is* $g \circ f$ *continu in a.*

Stelling 5.6 *(Behoud van teken):*
Is f continu in a en $f(a) \neq 0$*, dan behoudt f haar teken in een omgeving v a.*

Definitie 5.7 *f is* ***rechtscontinu*** *als* $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$
maw $\forall \xi > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - f(a)| < \xi$, *voor alle* $a < x < a + \delta, x \in D$

Gevolg 5.8 *Continu in a* $\Leftrightarrow$ *rechts- en linkscontinu in a*

Voc 7 *ophefbare discontinuiteit, sprongpunt, discontinuiteit van de eerste soort*

5.2 Continuïteit over een verzameling

Definitie 5.9 *f(x) met domein D is continu over een verzameling* $D \subseteq A \Leftrightarrow$ *f/A continu* $\Leftrightarrow$

$$(\forall x \in A)(\forall \xi > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in A)(|t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \xi)$$

Stelling 5.10 *f continu over* $]a, b[\subseteq D \Leftrightarrow$ *continu in elk punt van* $]a, b[$. *Dus:* $(\forall x \in]a, b[)(\forall \xi > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in \frac{]a,b[}{D})(|t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \xi)$

Stelling 5.11 *f continu over* $[a, b] \Leftrightarrow$
f continu over $]a, b[$*, rechtscontinu in a en linkscontinu in b.*

Stelling 5.12 *(Bijzonder geval v tussenwaardestelling, voor 0);*

$$\text{Zij } a < b, f(a)f(b) < 0, f \text{ continu over}[a, b] \Rightarrow \exists c \in]a, b[: f(c) = 0$$

Stelling 5.13 *(Tussenwaardestelling van Bolzano): Is f cont over interval I. Elk getal tussen 2 functiewaarden is zelf een functiewaarde van getal in f/I.*

Gevolg 5.14 *Is f continu over I dan is ook de waardenverz* $f(I) := \{f(x)|x \in I\}$ *een interval.*

Gevolg 5.15 *Stel* $I = [0, +\infty]$, $\forall a \in I, \exists$ *unieke* $x \in I$ *met de eigenschap dat* $x^2 = a$*. We noteren deze unieke x als* $\sqrt{a}$*.*

Voc 8 *(strikt) dalend en stijgende functie op I, inverse afbeelding* f^{-1}

Stelling 5.16 *(Inversie van continue strikt monotone functie)*

- *Zij f strikt* $\frac{stijgend}{dalend}$ *en continu over I. Dan heeft f een inverse* ψ *die strikt* $\frac{stijgend}{dalend}$ *en continu is over J (*$:= f(I)$*)*

Stelling 5.17 *(Extremumstelling van Weierstrass): Als f cont over* $[a, b] = I$
$\Rightarrow f/I$ *bereikt minstens 1 keer minimum, maximum maw*
$\exists x_1, x_2 \in I : \forall x \in I : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$
Opmerking:

- *De stelling komt hierop neer: Is f continu over een compact interval dan is het beeldinterval eveneens compact.*
- *Continuïteit vs gelijkmatige continuïteit:*
  $(\forall x \in A)(\forall \xi > 0)(\exists \delta_{x,\xi} > 0)(\forall x' \in A)(|x - x'| < \delta_{x,\xi} \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \xi)$
  $(\forall \xi > 0)(\exists \delta_\xi > 0)(\forall x, x' \in A)(|x' - x| < \delta_\xi \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \xi)$
  gelijkmatig continu $\Rightarrow$ *(puntsgewijs/gewoon) continu (én niet (altijd)* $\Leftarrow$*)*

Stelling 5.18 *(Heine, 1870):*
Is f continu over compact $[a, b] \Rightarrow$ *f gelijkmatig continu over* $[a, b]$

6 Afleidbaarheid

6.1 Afgeleiden van eerste orde

6.1.1 Algemene eigenschappen

Stelling 6.1 *f afleidbaar*
$\Leftrightarrow\ \exists\alpha\in\mathbb{R},\exists\, r\, functie : f(a+h) = f(a)+\alpha h+hr(h) \quad met\, r(h)\to 0,\ als\, h\to 0.$

Definitie 6.2 *De afgeleide (functie) van f, f' , is de functie f'(x) als waarde in die punten x waar f afleidbaar is.*

Stelling 6.3 *Is f afleidbaar in a, dan geldt:*

- *f is continu in a.*
- *(Eig vd pos afgeleide):* $f'(a) > 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 : \forall a < x < a+\delta : f(x) > f(a)$ *en voor alle* $a-\delta < x < a : f(x) < f(a)$

Stelling 6.4 *Rekenregels:*

- $(f\pm g)'(a) = f'(a)\pm g'(a)$
- $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Definitie 6.5 *Een functie is afleidbaar over/in open I als f in elk punt van dit interval afleidbaar is.*

Stelling 6.6 *(Kettingregel): Als f afleidb in a, g afldb in f(a)* $\Rightarrow$

$$F'(a) = g'(f(a))f'(a),\ \ met\ F(a) = g(f(a))$$

Stelling 6.7 *(Afleidbaarheid van inverse funct):* $\psi'(f(c)) = \dfrac{1}{f'(c)}$

6.1.2 Middelwaardestelling en toepassingen

Definitie 6.8 *Men zegt dat f, in een punt a een (lokaal) maximum bereikt als er een omgeving V bestaat :* $(\forall x\in V\cap D)(f(x)\leq f(a))$

Stelling 6.9 *(Nodige voorwaarde voor extremum): Bereikt f in a een lokaal extremum, en is f in a aflb, dan is f'(a) = 0.*

Stelling 6.10 *(Middelwaardestelling) Als* $a < b$*, f aflb over* $]a,b[$*, f continu over* $[a,b]\Rightarrow\ \exists c\in]a,b[: f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$

Stelling 6.11 *(Stijgen en dalen) Zij f aflb in open I, dan*

- *f constant in I* $\Leftrightarrow\ (\forall x\in I)(f'(x) = 0)$
- *f stijgend in I* $\Leftrightarrow\ (\forall x\in I)(f'(x)\geq 0)$
- *Als* $\forall x\in I : f'(x) > 0 \Rightarrow$ *f strikt stijgend in I (NIET* $\Leftarrow$*)*

Stelling 6.12 *(Veralgemeende middelwaardest):*

$$\frac{f(b-)-f(a+)}{g(b-)-(a+)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Stelling 6.13 *(De l'Hopital): bij lim* $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

$$Als\ lim_{x\to+\infty}^{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R},\ dan\ ook\ \ lim_{x\to+\infty}^{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

6.1.3 Functie van klasse C^1

Uit vb'n blijkt dat een afgeleide functie niet noodzakelijk continu is maar een afleidbare functie f is automatisch wel continu.

Definitie 6.14 *We noemen f van klasse* C^1 *(of glad over een open interval* $\subseteq D_f$*) als f' bestaat en continu is in elk punt van* $]a, b[$

Definitie 6.15 *We noemen f van klasse* C^1 *(of glad over een gesloten interval* $\subseteq D_f$*) als f*

- *f is continu over* $[a, b]$
- *f' bestaat en is continu over* $]a, b[$
- *f' heeft een rechterlimiet in a en een linkerlimiet in b*

Stelling 6.16 *f is glad over* $[a, b] \Leftrightarrow$ *f kan worden uitgebreid tot F die glad is over open interval dat [a,b] omvat. maw* $\exists$ *functie F,* $\exists]\alpha, \beta[$ *:*

- $[a, b] \subset]\alpha, \beta[$
- *F is van klasse* C^1 *over* $]\alpha, \beta[$ *(dus F' bestaat en is continu over* $]\alpha, \beta[$*)*
- $F/[a, b] = f/[a, b]$

De verzameling van alle functies die glad zijn over $J := C^1(J)$

6.2 Afgeleiden van hogere orde

$\rightsquigarrow$ *over klassen* C^1, C^n, C^∞

7 Integratie

7.1 Onderintegraal, bovenintegraal en integraal

Definitie 7.1 *Partitie π van I: genummerde eindige deelverzameling van I*
$\rightsquigarrow$ $\prod(I)$ *:= verzameling van alle parities van I.*

- *Bovensom :* $\quad S_\pi(f) = \sum_{k=1}^{n} sup_{I_k}(f) l_k \ \ (l_k = x_k - x_{k-1})$
- *Ondersom :* $\quad s_\pi(f) = \sum_{k=1}^{n} inf_{I_k}(f) l_k$
- *Bovenintegraal :* $\overline{\int_a^b} f := inf\ S_\pi$
- *Onderintegraal :* $\underline{\int_a^b} f := sup\ s_\pi$

Stelling 7.2 *Voegt men paritiepunten toe, dan wordt de ondersom niet kleiner en de bovensom niet groter.*

Stelling 7.3 *Willekeurige ondersom $\leq$ willekeurige bovensom.*

Definitie 7.4

$$Als\ \overline{\int_a^b} = \underline{\int_a^b} \Rightarrow\ f\ integreerbaar,\ \int\ \ is\ gemene\ waarde$$

Voc 9 *f is integrandum, I is integratie-interval, integratieveranderlijke*

Stelling 7.5 *Integreren is een lineaire operatie:*

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f, \quad \int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Stelling 7.6 *Positiviteit van de integraal:*

$$\forall x \in I([a,b]) : f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$$

Stelling 7.7 *De integraal is stijgend (monotoniteit vd integraal):*

$$\forall x \in I([a,b]) : f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Lemma 7.8 *(Additiviteit van de boven- en onderintegraal):*

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f \ \ en\ \ \underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$$

Stelling 7.9 *(Additiviteit van de integraal):*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Stelling 7.10 *Zij f integreerbaar over $I \Rightarrow$ ook over deelinterval J*

Stelling 7.11 *Is $f(x) \geq 0$ over $I/J, \Rightarrow \int_J f \leq \int_I f$*

Stelling 7.12 *Zij f integreerbaar, maar wordt in een eindig aatal punten van I gewijzigd , dan blijft f integreerbaar en haar integraal onverandert.*

7.2 Het kenmerk van Darboux

Stelling 7.13 *(Kenmerk van Darboux):*
f integreerbaar over $I \Leftrightarrow (\forall \xi > 0)(\exists \pi \in I) : S_\pi - s_\pi < \xi$

Toepassing 7.14 *Is f continu en begrensd over $]a, b[$ (:= continu over $[a, b]$)*
$\Rightarrow$ f integreerbaar over $]a, b[$

Gevolg 7.15 *Als f continu is over $]a, b[$ behalve in een eindig aantal punten, en begrensd over $[a, b]$, dan is f integreerbaar over $]a, b[$*

Stelling 7.16 *($\triangle$-ongelijkheid) $|f|$ integreerbaar als f integreerbaar is*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Stelling 7.17 *f en g integreerbaar over $I \Rightarrow fg$ integreerbaar over I*

Stelling 7.18 *(Middelwaardest) Als f continu op $[a, b]$ dan, $\exists c \in [a, b]$ waarvoor*

$$\int_a^b f = (b - a)f(c)$$

7.3 Oneigenlijke integraal over een begrensd interval

Stelling 7.19 *(Continuïteit van een integraal met veranderlijke bovengrens)*
f integrb over $]a, b[\Rightarrow F(x) := \int_{x_0}^x f$ continu over $[a, b]$ met $(a \leq x \leq b)$

7.4 De hoofdstellingen

Stelling 7.20 *(afgeleide ve integraal met veranderlijks bovengrens)*
Is f continu over open interval J, $c \in J$, dan bestaat F(x) en is F'(x) = f(x) voor elke $x \in J$
$\rightsquigarrow \left(\int_c^x f\right)' = f(x)$ *als f continu is.*

Stelling 7.21 *(Integratie ve afgeleide) f cnt $[a, b]$, f' cnt $]a, b[$*

$$\text{Dan is} \quad \int_a^b f' = f(b) - f(a)$$

Definitie 7.22 *Als g'(x) = f(x) $\forall x \in J \Rightarrow$ g (+ C) primitieve functie van f.*

7.5 Partïele integratie en substitutie

Stelling 7.23 *(Partiële integratie) Als f', g' cnt zijn over* $]a, b[$ *en* $[fg]_a^b$ *bestaat*

$$\text{dan} \quad \int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$$

Stelling 7.24 *(Grens-nr-grens transformatie ve integraal)*
Zij $a < b, \theta \in C^1[a, b]$ *en f continu over het beeldinterval* $\theta[a, b]$

$$\text{Dan is} \quad \int_a^b f(\theta(x))\theta'(x)dx = \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} f(y)dy$$

Gevolg 7.25 *Is f continu en begrensd over* $]a, b[$ *en periodiek met* $p = b - a$ *dan*

- *f is integreerbaar over elk begrensd interval*
- $\int$ *over een interval met lengte p is steeds gelijk aan* $\int$ *over* $]a, b[$

8 Elementaire functies en praktische integratie

Voor integratie heeft men genoeg aan veeltermen, $\int \frac{1}{x}$ en $\int \frac{1}{1+x^2}$

8.1 De hyperbolische familie

8.1.1 De logaritme

Definitie 8.1 *De (natuurlijke) logaritme* $ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$ln\, x := \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x > 0)$$

Stelling 8.2 *Rekenregels:*

- *ln is onbepaald afleidbaar over* $\mathbb{R}^+$, $ln'x = \frac{1}{x}$
- *ln is strikt stijgend*
- $lnx = 1 \Rightarrow x = 2,6 < e < 2,8$ *uniek!*
- $ln(xy) = lnx + lny, \ x, y > 0$
- $1 - \frac{1}{x} \leq lnx \leq x - 1, \ x > 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} lnx = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to 0} lnx = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln\, x}{x} = 0$
- *ln heeft als domein* $\mathbb{R}^+$ *en als waardenverzameling* $\mathbb{R}$

8.1.2 De exponentiële

Definitie 8.3 *De inverse van ln is de exponentiële (functie):*

$$exp\, x = ln^{-1}x,\ als\ x \in \mathbb{R}, \quad dus \qquad lnx = exp^{-1}x,\ als\ x > 0$$

Stelling 8.4 *Rekenregels:*

- *exp heeft domein* $\mathbb{R}$ *en beeld* $\mathbb{R}^+$*, is strikt stijgend en*

$$exp\ 0 = 1, \quad \lim_{x \to +\infty} exp\, x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} exp\, x = 0$$

- *exp is onbepaald afleidbaar over* $\mathbb{R}$, $exp' = exp$
- *exp(x + y) = exp x · exp y ihb exp(-x) = 1/(exp x)*
- *1 + x ≤ exp x, (*$x \in \mathbb{R}$*)* *en* *exp x ≤* $\frac{1}{1-x}$, $(x < 1)$
- $\lim\limits_{+\infty} \frac{veeltermfunctie}{exp\, x} = 0$

8.1.3 De machtsfuncties

Definitie 8.5 $x^y := exp(y\, lnx) = e^{y\, lnx}$

Stelling 8.6 *twee ≠ machtsfuncties;* $x \to a^x$ *en* $x \to x^a$

- a^x *met* $a > 1$*:* $(a^x)' = a^x lna$*, strikt stijgend,* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{a^x} = 0$
- a^x *met* $0 < a < 1$*:* $(a^x)' = a^x lna$*, strikt dalend,* $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
- x^a *met* $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$*:* $(x^a)' = ax^{a-1}$, $\frac{a>0}{a<0}$ *strikt* $\frac{stijgend}{dalend}$

Stelling 8.7 *(Euler):* $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t = e^x$

8.1.4 De hyperbolische functies

$$sinh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad cosh\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad tanh\, x = \frac{sinhx}{coshx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Stelling 8.8

- $cosh^2 x - sinh^2 x = 1$
- $sinh(x \pm y) = sinh\, x\, cosh\, y \pm cosh\, x\, sinh\, y$
  $cosh(x \pm y) = cosh\, x\, cosh\, y \pm sinh\, x\, sinh\, y$
- $sinh' = cosh, \ cosh' = sinh, \ tanh' = \frac{1}{cosh^2}$
- *sinh is oneven, cosh is even, tanh is oneven*

8.1.5 De inverse hyperbolische functie

Stelling 8.9 $\rightsquigarrow$ *domein cosh en tanh moeten worden aangepast*

- $argsinhx = sinh^{-1}x = ln(x\sqrt{x^2+1}) = \int \frac{1}{x^2+1}$
- $argcoshx = cosh^{-1}x = ln(x\sqrt{x^2-1}) = \int \frac{1}{x^2-1}$
- $argtanhx = tanh^{-1}x = ln(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}) = \int \frac{1}{1-x^2}$

8.2 De goniometrische familie

8.2.1 De arcustangens

Stelling 8.10 *(Bg) arctan* $x := \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

- *arctan is oneven, maw arctan(-x) = -arctan x*
- $\frac{x}{1+x^2} \leq actanx \leq x, \quad \forall x > 0$
- *arctan* x + *arctan* $\frac{1}{x} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & alsx < 0, \\ \frac{\pi}{2} & als, x > 0. \end{cases}$
- *arctan strikt stijgend met assymptoten in* $\frac{-\infty \to -\frac{\pi}{2}}{+\infty \to \frac{\pi}{2}}$

8.2.2 De tangens

Definitie 8.11 *tan* $x := arctan^{-1}\, x, \ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
tan$(x + k\pi)$ = *tan* $x, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}\backslash(2\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2}$

Stelling 8.12

- *tan* $x = \dfrac{2\,tan\frac{x}{2}}{1 - tan^2\frac{x}{2}}$
- *tan'* $x = 1 + tan^2 x = \frac{1}{cos^2 x}$

8.2.3 De sinus en cosinus

Definitie 8.13 *(t-formules):*

$$sin\ x := \begin{cases} \dfrac{2\,tan\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}} \\ \pm 1 \end{cases} \qquad cos\ x := \begin{cases} \dfrac{1-tan^2\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}} & \forall x \in \mathbb{R}\backslash(2\mathbb{Z}+1)\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \forall x \in (2\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Stelling 8.14

- $sin^2\ x + cos^2\ x = 1$
- $sin(x \pm y) = sin(x)\ cos(y) \pm cos(x)\ sin(y)$
  $cos(x \pm y) = cos(x)\ cos(y) \mp sin(x)\ sin(y)$
  $\rightsquigarrow$ *stel* $y = x$ *voor dubbele hoek*
  $cos(x-y) + cos(x+y) = 2\,cos(x)\ sin(y)$
  $cos(x-y) - cos(x+y) = 2\,sin(x)\ sin(y)$
  $sin(x-y) + sin(x+y) = 2\,sin(x)\ cos(y)$
  $sin(x-y) - sin(x+y) = -2\,cos(x)\ sin(y)$
  $cos(x) + cos(y) = 2\,cos((x+y)/2)\,cos((x-y)/2)$
  $cos(x) - cos(y) = -2\,sin((x+y)/2)\,sin((x-y)/2)$
  $sin(x) + sin(y) = 2\,sin((x+y)/2)\,cos((x-y)/2)$
  $sin(x) - sin(y) = 2\,cos((x+y)/2)\,sin((x-y)/2)$

Stelling 8.15 *(De Moivre):* $(cos\ x + i\ sin\ x)^n = cos\ nx + i\ sin\ nx$

Stelling 8.16 *(Ongelijkheid van Jordan):* $\frac{2x}{\pi} < sin\,x < x, \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$

Stelling 8.17 $\begin{cases} cos\theta = \alpha \mid & met\ \alpha^2+\beta^2=1,\ heeft\ juist\ 1\ oplossing \\ sin\theta = \beta \mid & in\ elk\ halfopen\ I\ met\ lengte\ 2\pi \end{cases}$

Toepassing 8.18 *(Poolcoördinaten): Zij P(x,y) een punt vh vlak* $\mathbb{R}^2$*. Dan bestaat er een unieke voerstraal* $r(=\sqrt{x^2+y^2})>0$ *en een unieke poolhoek* θ *in een halfopen interval met lengte* 2π *waarvoor*

$$x = rcos\theta \quad en \quad y = rsin\theta$$

$\rightsquigarrow$ *koppel* (θ, r) *zijn de poolcoördinaten van P(x,y), uniek!.*

Toepassing 8.19 *Deze voerstraal is gelijk aan de modulus vh complex getal* $z = x + iy$*, dit levert de zg goniometrische voorstelling van z op, nl*
$z = x + iy = rcos\theta + i(rsin\theta) = |z|(cos\theta + isin\theta)$

Toepassing 8.20 *Complexe wortels uit* $\zeta^n = z_0 = |z|(cos\theta_0 + isin\theta_0)$*:*

$$\begin{aligned}
\zeta_0 &= \sqrt[n]{|z_0|}\,(cos\frac{\theta_0}{n} + isin\frac{\theta_0}{n}) \\
\zeta_1 &= \sqrt[n]{|z_0|}\,(cos\frac{1}{n}(\theta_0+2\pi) + isin\frac{1}{n}(\theta_0+2\pi)) \\
\zeta_2 &= \sqrt[n]{|z_0|}\,(cos\frac{1}{n}(\theta_0+4\pi) + isin\frac{1}{n}(\theta_0+4\pi)) \\
&\dots \\
\zeta_{n-1} &= \sqrt[n]{|z_0|}\,(cos\frac{1}{n}(\theta_0+2\pi(n-1)) + isin\frac{1}{n}(\theta_0+2\pi(n-1)))
\end{aligned}$$

8.2.4 Overige cyclometrische functies

Stelling 8.21

$$\begin{array}{rcc}
arcsin := sin^{-1}|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} & [-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & arcsin'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
arccos := cos^{-1}|_{[0,\pi]} & [-1,1]\to[0,\pi] & arccos'x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
arcsin\,x + arccos\,x = \frac{\pi}{2} & &
\end{array}$$

8.3 Praktische integratietechniek

$\rightsquigarrow$ Dit onderdeel is geen leerstof theorie, kunnen toepassen volstaat :D

Stelling 8.22 *Natuurlijk wilt dit niet zeggen dat we er niks van moeten onthouden:*

- *Partiële Integratie (PI), kettingregel, partieelbreuken + C voor primitieven*
- $\int \frac{dx}{sin^2x} = -\frac{1}{tanx}$
- $\int \frac{dx}{sinx} = -argtanh(cos)x = ln|tan(\frac{x}{2})|$
- $\frac{dx}{cosx} = argtanh(sinx) = ln|tan(\frac{x}{2}+\frac{x}{4})|$

afgeleide	sin x	cos x	tan x
identiek	$cos x$	$-sin x$	$\frac{1}{cos^2 x}$
hyperbolicus	$cosh$ x	$sinh x$	$\frac{1}{cosh^2 x}$
boogjes	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$
hyperboogjes	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{1}{1-x^2}$

Stelling 8.23 *Volgende onbep integralen, kunnen herleid worden tot onbep integralen van rationale integranda, waarin $\mathcal{F}$ telkens rationale functies van de argumenten voorstelt:*

- $\int \mathcal{F}(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}})\ dx$, *ihb* $\int \mathcal{F}(x, \sqrt[k]{ax+b})\ dx$
- $\int \mathcal{F}(e^{ax})\ dx$, *ihb* $\int \mathcal{F}$ *(sinh ax, cosh ax)* $dx\ (a \neq 0)$
- $\int \mathcal{F}$*(sin x, cos x)* dx
- $\int \mathcal{F}(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\ dx\ (a \neq 0, b^2 - 4ac \neq 0)$

Stelling 8.24 *Voorspellen hoe een primitieve eruitziet van een exponentiële vermenigvuldigd met een veelterm*

$$\int e^{\mu x}\, P(x)\, dx = e^{\mu x}\left(\frac{c_n}{\mu}x^n + \text{ termen van lagere graad}\right)$$

9 Complexe reeksen

9.1 Twee aanvullingen over rijen

9.1.1 Boven- en onderlimiet van een begrensde reële rij

Vanaf nu 2 getallen (ipv 1) associëren met een begrensde rij, waarvoor $L_1 - \xi < x_n < L2 + \xi$

Constructie: Dalende rij van suprema: $\begin{array}{r} sup\{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \\ sup\{x_2, x_3, \ldots\} \\ sup\{x_3, \ldots\} \end{array}$

$$b \geq \overline{\lim_{n\to+\infty}} := \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} x_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k$$

$$\vee$$

$$a \leq \underline{\lim_{n\to+\infty}} := \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} x_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_k$$

Stelling 9.1 *(Hoofdeigenschap van bovenlimiet): analoog onderlimiet*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : x_n < \overline{\lim_{n\to+\infty}} + \xi$$

Stelling 9.2 *een rij convergeert* $\Leftrightarrow$ $\overline{\lim} = \underline{\lim} = L$
$\rightsquigarrow$ *Rekenregeltjes voor* $\overline{\lim}$ *en* $\underline{\lim}$

9.1.2 Convergentie van complexe rijen

De theorie voor reële rijen kan uitgebreid worden naar complexe, zo is
$(x_n + iy_n \to x_0 + iy_0) \;\Leftrightarrow\; (x_n \to x_0 \;\&\; y_n \to y_0)$
alleen voor het kenmerk van Cauchy is er nodig:

Stelling 9.3 *(Stelling van de convergente complexe deelrij):*
Elke rij $z_1, z_2, z_3, \ldots$ uit $\overline{B}(0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ $(R > 0)$ heeft een deelrij $z_{n_1}, a_{n_2}, z_{n_3}, \ldots$ die convergeert naar een punt z_0 van $\overline{B}(0, R)$

$\triangle$ ongelijkheid in $\mathbb{C}$: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

9.2 Convergentie van complexe reeksen

Definitie 9.4 *Een reeks $\sum_{n\geq 1}$ is de rij van partieelsommen :*
$z_1, z_1 + z_2, z_1 + z_2 + z_3, \ldots$ *waarbij $s_n := z_1 + \ldots + z_n$*

Definitie 9.5 *Als $s_1, s_2, \ldots$ convergeert dan conveergt de reeks, de lim s_n heet de som van de reeks, we noteren de som van $\sum_{n\geq 1} z_n$*
als $\sum_{n=1}^{+\infty} := \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (z_1 + \ldots + z_n)$

Stelling 9.6 *Een reële reeks $\sum x_n, x_n \geq 0$ $\dfrac{conv \;\Leftrightarrow\; s_n \leq M}{div \;\Leftrightarrow\; s_n \geq M}$*

Stelling 9.7 *Als z_n convergeert $\;\Rightarrow\;$ $z_n \to 0$, als $n \to +\infty$*
Gevolg: Als $z_n \nrightarrow 0$, dan is $\sum z_n$ niet convergent

Definitie 9.8 ***De complexe meetkundige reeks*** *is $\sum_{n\geq 0} \rho^n$ met ρ, de reden, een vast complex getal.*

- *convergeert* $\Leftrightarrow$ $|\rho| < 1$
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \rho^n \; \frac{1}{1-\rho}$
- $1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{n-1} = \frac{1-\rho^n}{1-\rho}$

Stelling 9.9 *(Associativiteit): Als men in een convergente reeks de termen, door het* ***plaatsen*** *van haakjes, groepeert. Dan is ook de nieuwe reeks convergent, en wel naar de reekssom van de oude reeks.*
(haakjes weglaten of verplaatsen mag NIET)

Stelling 9.10 *(Lineariteit):*

- *Als $\sum a_n$ en $\sum b_n$ conv $\Rightarrow a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots$ conv nr $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$*
- *Als $\sum a_n$ conv, en α is complex cnst $\Rightarrow$*
  $\alpha a_1 + \alpha a_2 + \ldots$ conv, en wel naar $\alpha \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$

Gevolg 9.11 *Lineariteit + haakjes:*
$\sum a_n, \sum b_n conv \Rightarrow \sum(a_n + b_n)$, *en* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$

Stelling 9.12 *(Grote convergentieregel van Cauchy):*

$$\sum z_n \, conv \Leftrightarrow |z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \xi, \text{ als } n > N_\xi \text{ en } p \in \mathbb{N}$$

Stelling 9.13 *(△ ongelijkheid voor reeksen):* $|\sum_{n=1}^{+\infty} z_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$

Voc 10 ***absolute convergentie****: als $\sum |z_n|$ ook conv is,*
absoluut & betrekkelijk conv, omschikking (a_n juist 1x in $\sum b_n$)

Stelling 9.14 *Omschikking heeft geen invloed op convergentie (blijft de oorspronkelijke) & reekssom van absoluut convergente reeksen.*

Stelling 9.15 *Als $A := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ en $B := \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ absoluut convergeren $\Rightarrow$*
elke reeks met termen vd vorm $a_n b_n (n, m \geq 1)$ conv absoluut naar AB.
$\sum_{n,m=1}^{+\infty} a_n b_n = (\sum_{n=1}^{+\infty} a_n)(\sum_{m=1}^{+\infty} b_m)$

9.3 Convergentie v reële reeksen zonder negatieve termen

9.3.1 Drie convergentieregels door vergelijking

Definitie 9.16 ***Majoratie****: $\sum x_n$ wordt gemajoreerd door de majorante $\sum x'_n$,*
of $\sum x_n \ll \sum x'_n$ als $x_n \leq K \cdot x'_n$ vanaf een zekere $n \geq N$

Stelling 9.17 *(Majorantenregel):*

$$Als \ \sum x_n \ll \sum x'_n, \sum x'_n \ conv \ \Rightarrow \sum x_n \ conv$$

Stelling 9.18 *(Quotiëntenregel):*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} = A \in \mathbb{R}, \ Als \begin{cases} A > 0, & \sum x_n \ conv \ \Leftrightarrow \ \sum y_n \ conv \\ A = 0, & \sum y_n \ conv \ \Rightarrow \ \sum x_n \ conv \end{cases}$$

Stelling 9.19 *(Vergelijking van groeisnelheid):*

$$Als \ \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{y_{n+1}}{y_n}, \text{ vanaf zekere } n: \ \sum x_n \ conv \ \Rightarrow \sum y_n \ conv$$

9.3.2 Vier grote convergentieregels

Stelling 9.20 *(Integraaltest van Cauchy): f dalend, nr onder begrensd $A \in \mathbb{R}$*

$$met \begin{cases} s_n: & \text{partieelsom functiewaarden } (= f(1)f(2) + \ldots + f(n)) \\ I_n: & \text{integraal van } f \text{ van 1 tot } n \ (= \int_1^n f(x)dx \ \forall n \geq 1) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *De verschilrij $(s_n - I_n)$ is dalend en convergent naar $lim \in [ondergrens, f(1)]$*

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f(n) \ conv \ \Leftrightarrow I_n \ conv$$

Voc 11 *harmonische reeks:* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

De hyperharmonische reeks is $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$

- Toepassing integraaltest: $\begin{cases} conv & \Leftrightarrow p > 1 \\ div(+\infty) & \Leftrightarrow p < 1 \end{cases}$
- De harmonische $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n}$ is divergent en stijgt zo vlug als ln x.
- Voor n groot genoeg is $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n} \approx lnx + \Xi$
- $\Xi = 0.5772 =$ de constante ven Euler

Uitbreiding boven- en onderlimiet nl;
$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = +\infty$ en $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = -\infty$, als reeks onbegrensd is.

Stelling 9.21 $\sum x_n$ *reële reeks zonder neg termen,* $\lambda := \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{x_n} \in [0, +\infty]$

- $\lambda < 1 \quad \Leftrightarrow \sum x_n \ll$ *conv meetkundige reeks*
- *als* $\lambda > 1$*, dan* $x_n \nrightarrow 0$

Gevolg 9.22 *(Worteltest, 'Kleine' convergentieregel van Cauchy):*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{x_n} = \lambda \quad \begin{cases} < 1 & \sum x_n \ conv \\ > 1 & \sum x_n \ div \ nr \ +\infty \ en \ x_n \nrightarrow 0 \end{cases}$$

Stelling 9.23 *Zij* $\sum x_n$ *reeël, pos termen :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} := \lambda \in [0, +\infty]$ *bestaat*

- $\lambda < 1 \quad \Leftrightarrow \sum x_n \ll$ *conv meetkundige reeks*
- *als* $\lambda > 1$*, dan* $x_n \nrightarrow 0$

Gevolg 9.24 *(Convergentieregel d'Alembert):*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad \begin{cases} < 1 & \sum x_n \ conv \\ > 1 & \sum x_n \ div \ nr \ +\infty \ en \ x_n \nrightarrow 0 \end{cases}$$

Stelling 9.25 $\sum x_n$ *reeël, pos :* $\lim\limits_{n\to+\infty} n \left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) := \mu \in [-\infty, +\infty]$ *bestaat*

- $\mu > 1$, *dan* $\sum x_n \ll$ *conv hyperharmonische reeks*
- *als* $\mu < 1$*, dan* $\sum \frac{1}{n} \ll \sum x_n$

Gevolg 9.26 *(Convergentieregel van Raabe):*
$\sum x_n$ *reeël, pos :* $\lim\limits_{n\to+\infty} n \left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) := \mu \in [-\infty, +\infty]$ *bestaat*

- $\mu > 1$, *dan* $\sum x_n$ *conv*
- *als* $\mu < 1$*, dan* $\sum x_n$ *div*

$\rightsquigarrow$ Cauchy, d'Alembert en Raabe hebben absolute varianten voor convergentie van complexe getallen, stel: $x_n = |z_n|$

9.4 Convergentie van reële wisselreeksen

Stelling 9.27 *(Kenmerk van Leibniz voor wisselreeksen):*
$p_1 > p_2 > p_3 > \ldots$: *strikt dalende rij v pos get, met* $p_n \to 0$

- *de wisselreeks* $p_1 - p_2 + p_3 - \ldots$ *convergeert*
- *de reekssom ligt tussen 2 opeenvolgende partieelsommen*

10 Gelijkmatige convergentie

10.1 Gelijkmatige convergentie van rijen van functie

Definitie 10.1 *(**Puntsgewijze convergentie** van functies):*

$$\forall\, z \in A : f_n(z) \to f(z) \text{ notatie: } f_n \xrightarrow{A} f$$

$$\forall\, z \in A : \forall\, \xi > 0 : \exists N_{z,\xi} \in \mathbb{N} : n \geq N_{z,\xi} \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \xi$$

$$\text{vb: } \arctan nx \xrightarrow{\mathbb{R}} \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases} \text{ De limietfunctie is niet continu}$$

Definitie 10.2 *(**Gelijkmatige convergentie** van functie): (not.* $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$*)*

$$\forall\, \xi > 0 : \exists N_{z,\xi} \in \mathbb{N} : n \geq N_{z,\xi} \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \xi$$

Stelling 10.3 *(Overdracht van continuïteit):*

$$f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f, \text{ elke beperking } f_n\backslash_{[a,b]} \text{ continu } \Rightarrow f\backslash_{[a,b]} \text{ continu}$$

Stelling 10.4 *(Omwisselen van limieten en integralen):*
$f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f, x$ *en* x_0 *tussen a en b*

$$g_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt \;\;\Rightarrow\;\; g(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

$$\text{Dan } g_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g, \text{ of } \lim_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt = \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt$$

10.2 Gelijkmatige convergentie v reeksen v functies $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Definitie 10.5 *reeks van functies:* $f_1 + f_2 + \ldots = \sum f_n$ *met* $s_n = f_1 + \ldots + f_n$

- *Puntsgewijze conv:* $s_n \xrightarrow{A} f \;\; \forall\, z : f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ *over A*
- *Gelijkmatige conv:* $s_n \overset{A}{\rightrightarrows} f \;\; \forall\, \xi > 0 : f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ *gelijkmatig over A*

$\rightsquigarrow$ *Eveneens overdracht van continuïteit en omwisselen* $\sum$ *en* $\int$

Stelling 10.6 *(M-test van Weierstrass):*
Zij $\sum f_n$ *complexe functiereeks*

$$(\exists a_n : f_n(z) \leq a_n, \forall\, z) \ \wedge \ (\sum a_n \ conv) \Rightarrow \sum f_n \ \textit{gelijkmatig convergent}$$

$\rightsquigarrow$ Nodig om de gelijkmatige conv van reeksen van functies na te gaan

11 Complexe machtreeksen

11.1 Convergentie

Een machtreeks is een oneindige som vd vorm $\sum\limits_{n\geq 0}^{+\infty}$ waarbij a_n constanten zijn en z complex (of reëel, meestal x).
Dit is een bijzondere reeks omdat, in de punten (z) waarvoor deze reeksen convergent zijn, ze absoluut convergent zijn. Deze punten z vormen een schijf in het complexe vlak van Gauss.

11.1.1 De convergentiestraal

Definitie 11.1 *De convergentiestraal*

$$R = sup\{r \geq 0 | \lim_{n\to+\infty} a_n r^n = 0\}$$

van de machtreeks:

$$R := \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty]$$

waarbij B(0, R) de convergentieschijf is.

Stelling 11.2
$$\begin{array}{lll} R = 0 & \Rightarrow & \sum a_n z^n \ \textit{convergeert alleen voor } z = 0 \\ 0 < R < +\infty & \Rightarrow & \sum a_n z^n \begin{cases} \textit{absoluut convergent voor } |z| < R \\ \textit{niet convergent voor } |z| > R \end{cases} \\ R = +\infty & \Rightarrow & \sum a_n z^n \ \textit{convergent over heel } \mathbb{C} \end{array}$$

Stelling 11.3 *De convergentiestraal van* $\sum a_n z^n$ *is* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|$ *als die bestaat.*

Stelling 11.4 a_n *begrensd* $\Rightarrow R \geq 1$
$a_n \nrightarrow 0 \Rightarrow R \leq 1$
a_n *begrensd en* $a_n \nrightarrow 0 \Rightarrow R = 1$

Stelling 11.5 $\sum a_n z^n$ *convergeert gelijkmatig over elke gesloten schijf met de oorsprong als middelpunt en een straal die kleiner is dan de convergentiestraal.*

11.1.2 Termsgewijze afgeleide/integratie van een machtreeks

Definitie 11.6 $\sum\limits_{n\geq 0}^{+\infty} a_n z^n$ *heeft als termsgewijze*

$$\begin{cases} \text{afgeleide; de machtreeks } \sum n a_n z^{n-1} \\ \text{geintegreerde; de reeks } \sum a_n \dfrac{z^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

Stelling 11.7 *Een complexe machtreeks en haar termsgewijze geïntegreerde/afgeleide hebben dezelfde convergentiestraal.*

Stelling 11.8 *Stel* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *voor* $-R < x < R$.
Dan is voor elke $x \in]$*-R, R*$[$

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ en } f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Opmerking: Indien $R = +\infty$, *dan geldt deze eig over heel* $\mathbb{R}$

Gevolg 11.9

- *Is* $R \in \mathbb{R}^+$, *dan is (de reekssom van) een machtreeks op]-R,R[onbepaald afleidbaar, en de opeenvolgende afleidingen mogen termsgewijs uitgevoerd worden.*
- *De coëfficienten* $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad n \geq 0$
- *Als er een* $\xi > 0$ *bestaat waarvoor* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \qquad (-\xi < x < \xi)$ *dan is* $a_n = b_n$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}$

11.1.3 Taylorontwikkelingen (1715)

Definitie 11.10 *Als* $U \ni x_0$ *een open interval is, en als*

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots \quad (x \in U)$$

dan noemt men het rechterlid de Taylorontwikkeling met centraal punt x_0 *van f over U.*
In het merendeel van de gevallen is $x_0 = 0$ *dus*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

waarbij a_n *uniek bepaald is, namelijk* $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Uit de meetkundige reeks

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots \quad (-1 < x < 1)$$

Dit wordt gewoon bekomen door in $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n$, stel $q = -x$, dus geen Taylorberekeningen. Analoog worden $\frac{1}{1+x^2}$ en $\frac{1}{1-x^2}$ bekomen. Hieruit vloeien door termsgewijze integratie arctan x (Leibniz), ln(1 + x), argtanh x.

Uit de formule van Taylor

Stelling 11.11 *(Formule van Taylor):*
Als $n \in \mathbb{N}^+, f \in C^n(I), 0 = x_0 \in I,$ *dan geldt* $\forall\, x \in I$*:*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2\frac{f''(0)}{2!} + \ldots + x^{n-1}\frac{f^{n-1}(0)}{(n-1)!} + \int_0^x \frac{x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$$

en $\exists \xi \in$ *[0, x] of [x, 0]:*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2\frac{f''(0)}{2!} + \ldots + x^{n-1}\frac{f^{n-1}(0)}{(n-1)!} + x^n\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!}$$

Hierin is bovenaan de integaalgedaant va de restterm uitgedrukt
en onderaan de ressterm van Lagrange.

Definitie 11.12

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

Deze veelterm heet de Taylorbenadering van orde n - 1 met centraal punt x_0 *voor f*
Opmerking:

- *De graad van deze benadering kan lager zijn dan n - 1*
- *Is f een veelterm van graad n - 1, dan is* $R_n = 0$*, en de Taylorbenadering van orde n - 1 valt met f zelf samen.*

Stelling 11.13 *(Voldoende voorwaarden voor Taylorontwikkeling):*
De gehele oneindige ontwikkeling valt pas samen met f(x) over]-a, a[als

- $f \in C^{+\infty}$ *]-a, a[*
- $f^{(n)}(x) \leq G \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in$ *]-a,a[)*

Stelling 11.14 *De volgende Taylorontwikkelingen voldoen aan de voldoende voowaarde over gans* $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
sinx &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \\
cosx &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \\
sinhx &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \\
coshx &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots
\end{aligned}$$

Uit de binomiaalreeks :
Het binomium van Newton levert een natuurlijke macht van de tweeterm 1 + x op, nl

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^m$$

Als nu m $\in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ dan wordt binomium vervangen door de binomiaalreeks.

Stelling 11.15 *Voor $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ en $-1 < x < 1$ geldt*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Als $\alpha > 0$, dan geldt dit ook voor $x = \pm 1$ en de convergentie is dan absoluut en gelijkmatig in [-1, 1]

Hieruit kan bvb voor $\alpha = -1/2$ de ontwikkeling afgeleidt worden voor
$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \xrightarrow{termsgewijze \int}$ *arcsin* x
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow{termsgewijze \int}$ *argsinh* x

11.1.4 De limietstelling van Abel

Stelling 11.16 *Complexe machtreeksen convergeren gelijkmatig over elke $\overline{B}$(0, r) $\subset$ B(0, R)*

Wat met randpunten? Hier wordt Abel bewezen voor R=1 en x=1

Stelling 11.17 *(Convergentiestelling van Abel, 1826): Een reële machtreeks die convergent is in x = R = 1, is gelijkmatig convergent over het lijnstuk [0,1].*

Gevolg 11.18 *(Limietstelling van Abel): Als reekssom conv in x = 1, dan is de reekssom daar $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)$ gelijk aan de limiet voor de limietfunctie $\lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$*

12 Fourierreeksen, 1822

Fourier's doel: willekeurige f ontwikkelen in sinussen en cosinussen.

12.1 Fourierreeksen

Definitie 12.1 *Een Fourierreeks of goniometrische reeks is een reeks van functies vd vorm:*

$$a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n cosnx + b_n sinnx) \quad a_n, b_n \in \mathbb{C}$$

Omdat elk vd termen van zo'n reeks 2π-periodiek is, is haar reekssom dat ook.

Lemma 12.2 *(Orthogonaliteit): Zijn f,g $\neq$ functies uit $\{cosnx, sinnx : n \in \mathbb{N}^+\}$, dan is $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = 0$*

Stelling 12.3 *Als een Fourierreeks gelijkmatig convergeert over* $\mathbb{R}$ *met reekssom f, dan is*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,cos\,nx\,dx \qquad (n \in \mathbb{N}_0^+)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,sin\,nx\,dx$$

Opmerking: Wegens de M-test convergeert een Fourierreeks gelijkmatig over heel $\mathbb{R}$ *zodra* $\sum a_n$ *en* $\sum b_n$ *absoluut convergeren. Zoals zal blijken is de reekssom van een puntsgewijze convergente Fourierreeks echter niet steeds continu: in dat geval kan de convergentie niet gelijkmatig zijn (overdracht v continuïteit).*

12.2 Fourierontwikkeling

kunnen we een gegeven f ontbinden in een Fourierreeks?

Definitie 12.4 *Als f een afbeelding* $[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ *is, dan zijn* a_n *en* b_n *de Fouriercoëfficiënten van f en dde Fourierreeks met die coëfficiënten is de Fourierontwikkeling van f.*
Opmerking: f even $\to b_n = 0$*, f oneven* $\to a_n = 0$

Lemma 12.5 *De k-de partieelsom van de Fourierontwikkeling van een* 2π*-periodieke afb f:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *is*

$$s_k(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_k(t)\,dt, \quad waarbij\ D_k(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{k} cos\,nt$$

Definitie 12.6 *De functie* D_k *noemen we de k-de kernfunctie van Dirichlet.*
Er volgt dat D_k *continu is op heel* $\mathbb{R}$ *en* 2π*-periodiek met* $\int_{-\pi}^{\pi} D_k = 1$

Lemma 12.7 *Voor alle natuurlijke k en* $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ *is*

$$D_k(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{sin(k+\frac{1}{2})x}{sin\frac{x}{2}}$$

Lemma 12.8 *(Hulpstelling van Riemann): Is f continu op [a, b], dan is*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\,sin\,\lambda x\,dx = 0$$

Gevolg 12.9 *Id f continu op*$[-\pi,\pi]$*, dan zijn* $lim_n\,a_n = lim_n\,b_n = 0$

Stelling 12.10 *(Zeefeigenschap):Is* $f \in C^1([-\pi,\pi])$*, dan is*

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f\,D_k = f(0)$$

Opmerking: integralen die de zeefeigenschap vertonen zijn singulier.

Stelling 12.11 *(Convergentie van de Fourierontwikkeling, bijzonder geval):*
Als f 2π*-periodiek is en van klasse*C^1 *op heel* $\mathbb{R}$*, dan convergeert de Fourierontwikkeling van f op heel* $\mathbb{R}$ *naar f*

Definitie 12.12 *Een functie f:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *noemen we over [a, b] stuksgewijs* C^1 *met verdeelpunten* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ *als* $f_{|\,]x_{k-1},x_k[}$ *voor* $k = 1, 2, \ldots, n$ *de restrictie is van een functie in* $C^1([x_{k-1}, x_k])$.
Omerking: f hoeft niet; gedeffinieerd te zijn in de veerdeelpunten;
en niet noodzakelijk continu te zijn over [a, b]

Stelling 12.13 *(Convergentie van de Fourierontwikkeling):*
Als f 2π*-periodiek is en stuksgewijs* C^1 *over* $[-\pi, \pi]$*, dan geldt* $\forall \quad x$

$$a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n cosnx + b_n sinnx) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

Nu voor niet-periodieke functies, eerst enkele def's

Definitie 12.14 *Is f stuksgewijs* C^1 *over* $[-\pi, \pi]$ *dan is*

- f^π *de periodieke uitbreiding van f,*
  die ontstaat door $f\backslash_{]-\pi,\pi[}$ *voort te zetten met periode* 2π.
- $f^{\pi,\nu}(x)$ *de genormaliseerde periodieke uitbreiding van f,*
  die wordt gedefinieerd $(\forall\, x \in \mathbb{R}) : \dfrac{f^\pi(x+) + f^\pi(x-)}{2}$

Stelling 12.15 *Is f stuksgewijs* C^1 *over* $[-\pi, \pi]$*,*
dan convergeert de Fourierontwikkeling van f in elke $x \in \mathbb{R}$ *naar* $f^{\pi,\nu}(x)$

Stelling 12.16 *(Convergentie niet-2π-periodieke functies):*
Is f stuksgewijs C^1 *over [-L, L],*
en men de Fouriercoëfficiënten tov [-L, L] als volgt definieert:

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad (n \in \mathbb{N}_0^+)$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

dan convergeert $a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sin\frac{n\pi x}{L})$ *naar* $f^{\pi,\nu}(x)$

13 Lineaire differentiaalvergelijkingen

Definitie 13.1 *Een differentiaalvergelijking is een verg waarin een onbekende functie voorkomt als afgeleide van eerste of hogere orde. Een oplossing is een functie die van die vergelijking een gelijkheid maakt over het beschouwde interval.*

13.1 Differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

Definitie 13.2 *Een lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde heeft de gedaante*

$$y' + a(x)y = R(x) \tag{1}$$

Als $R = 0$, dan is de vergelijking homogeen.

Stelling 13.3 *Zij U een open interval waarover de functies a en R: $U \to \mathbb{R}$ continu zijn.*
Dan worden de oplossingen over U van (1) juist gegeven door

$$\varphi = e^{-\int a}\left(c + \int R\, e^{\int a}\right) \quad c \in \mathbb{R}\, will.$$

13.2 Differentiaalvergelijkingen van hogere orde

Definitie 13.4 *Een lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde heeft de gedaante*

$$y'' + a(x)y‘' + b(x)y = R(x) \tag{2}$$

Als $R = 0$, dan is de vergelijking homogeen.

Stelling 13.5 *Is φ een oplossing zonder nulpunten vd **homogene** vergelijking (2) in een open interval, dan wordt de algemene oplossing vd niet-homogene vergelijking over U gegeven door:*

$$c_1\varphi + c_2\varphi \int \frac{e^{-\int a}}{\varphi^2} + \psi_0 \quad c_{1,2} \in \mathbb{R}\ will$$

waarbij de functie ψ_0 gevonden wordt door de verlaging van de orde.

Hierbij is ψ_0 een particuliere oplossing voor de niet-homogene vergelijking (2)
Verder is $c_1\varphi + c_2\varphi \int \frac{e^{-\int a}}{\varphi^2}$ de algemene oplossing vd homogene vergelijking

Stelling 13.6 *Als ψ_0 een oplossing is van de niet-homogene vergelijking over U,*
dan worden al haar oplossingen gegeven door

$$\{\psi_0 + \chi : \chi \textit{ is een oplossing van de homogene vergelijking over } U\}$$

Stelling 13.7 *Zij φ een oplossing zonder nulpunten vd homogene vergelijking in U, dan geldt:*

- *φ en $\varphi \int \frac{e^{-\int a}}{\varphi^2}$ zijn onafhankelijke oplossingen.*

- *De oplossingsverzameling vd homogene vergelijking (2) is een 2-dim verctorruimte.*
- *Als $\varphi_{1,2}$ 2 onafhankelijke oplossingen zijn vd homogene verg, dan worden alle oplossingen ervan juist gegeven door*

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \qquad c_{1,2} \in \mathbb{R}\ will$$

Gevolg 13.8 *Is (φ_1, φ_2) een onafhankelijk stel oplossingen van de homogene verg over U, en is ψ_0 één oplossing vd niet-homogene verg over U, dan is*

$$\{c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \psi_0 : (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

de gehele oplossingenverzameling van de niet-homogene vergelijking over U.

13.2.1 Constante coëfficiënten

Wat als nu in een bijzonder geval van (2) de vergelijking verandert in

$$y'' + py' + qy = 0 \quad \text{p,q reële constanten} \tag{3}$$

Definitie 13.9 *De karakteristieke veelterm van (3) is de veelterm $x^2 + px + q$. $\rightarrow$ heeft altijd complexe wortels dus vinden we steeds een complexwaardige oplossing.*

Definitie 13.10 *Is $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$, dan is*

$$e^{a+ib} := e^a(cos\, b + i\, sin\, b)(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$$