II. Parate kennis

1. Geef de definitie van het *supremum* en formuleer de *kenmerkende eigenschap van het supremum.* (Geen bewijs!)
2. Formuleer de *middelwaardestelling* (voor de afgeleide) en de *middelwaardestelling in integraalvorm.* (Geen bewijs!)
3. Geef de Taylorontwikkeling van $\arctan x$. Vermeld voor welke $x \in \mathbb{R}$ ze geldig is. (Geen bewijs!)
4. Formuleer de stelling die een voldoende voorwaarde geeft voor het *omwisselen van limiet en integraal.* (Geen bewijs!)
5. Geef de definitie van een *Fourierreeks* en definieer (d.m.v. een integraal) de *Fouriercoëfficiënten* van een functie f. (Geen bewijs!)
6. Geef het reële en imaginaire deel van e^{a+bi} $(a, b \in \mathbb{R})$.

III. Actieve bewijzen

1. Als (x_n) en (y_n) convergente reële rijen zijn, toon dan aan dat $\lim_n(x_n y_n) = (\lim_n x_n)(\lim_n y_n)$.
2. Formuleer en bewijs de Tweede hoofdstelling (integratie van een afgeleide). Je mag bij het bewijs de Eerste hoofdstelling zonder bewijs gebruiken.
3. Zij $\sum x_n$ een reële reeks met louter positieve termen waarvoor
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} =: \lambda \in [0,1[$$
bestaat. Toon aan dat $\sum x_n$ gemajoreerd wordt door een convergente meetkundige reeks.
4. Bereken $\lim_{x\to+\infty} \tanh x$ (met bewijs).

IV. Passieve bewijzen

1. Beantwoord de vragen:

Stelling. *Als f continu is over het compact interval $I = [a,b]$, dan bereikt f/I minstens één keer haar grootste waarde.*

Bewijs. Het bewijs verloopt in twee stappen.

1. $\underline{f(I) \text{ is begrensd.}}$[1] Veronderstel dat dit niet zo is. Dan zou
$$\underline{(\forall K > 0)(\exists x \in I)(|f(x)| > K)}[2].$$
Passen we deze formule toe voor $K = 1$, dan vinden we een $x_1 \in I$ met $|f(x_1)| > 1$. Nemen we $K = 2$, dan vinden we een $x_2 \in I$ met $|f(x_2)| > 2$. Zo construeren we een rij $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ met $a \leqslant x_n \leqslant b$ en $|f(x_n)| > n$ voor alle n. $\underline{\text{Dan bestaat een deelrij } x_{n_k} \to \gamma \in I.}$[3] Dan zal ook $\underline{f(x_{n_k}) \to f(\gamma)}$[4]. $\underline{\text{Daardoor zou de rij } f(x_{n_k}) \text{ begrensd zijn}}$[5], wat strijdig is met $|f(x_{n_1})| > \underline{n_1 \geqslant 1}$[6], $|f(x_{n_2})| > n_2 \geqslant 2$, $|f(x_{n_3})| > n_3 \geqslant 3, \ldots$.

2. *$f(I)$ heeft een grootste element.* Stel $M = \sup_{x\in I} f(x)$. We tonen aan dat $M = \max f(I)$, m.a.w. dat $M \in f(I)$[7]. Dan bestaan $x_n \in I$ met de eigenschap dat $M - 1/n \leqslant f(x_n) \leqslant M$ voor elke $n \in \mathbb{N}^+$. Dan bestaat een deelrij $x_{n_k} \to \gamma \in I$, waarvoor opnieuw $f(x_{n_k}) \to f(\gamma)$. $\underline{\text{Maar ook is } f(x_{n_k}) \to M}$[8], zodat $\underline{f(\gamma) = M}$[9]. □

[1] Definieer '$f(I)$ is begrensd'.
[2] Toon aan dat deze formule geldt.
[3-5] Verklaar.
[6] Waarom is $n_k \geqslant k$ voor elke $k \in \mathbb{N}^+$?
[7] Toon aan dat uit $M \in f(I)$ volgt dat $M = \max f(I)$.
[8-9] Verklaar.
[10] Waarom is deel 1. van het bewijs nodig? M.a.w., waarom zou het bewijs onvolledig zijn als we enkel deel 2. van het bewijs zouden geven?
(Z.O.Z.)

2. Beantwoord de vragen:

Stelling. *Als f integreerbaar is over $I =]a,b[$, dan is f ook integreerbaar over elk nietleeg deelinterval $J =]c,d[\subseteq]a,b[$.*

Bewijs. Kies willekeurig $\varepsilon > 0$. Dan bestaat een partitie π van I waarvoor $S_\pi - s_\pi \leqslant \varepsilon$ [1]. Noem $\pi' := \pi \cup \{c,d\}$. Omdat $\pi \subseteq \pi'$, is ook $S_{\pi'} - s_{\pi'} \overset{[2]}{\leqslant} S_\pi - s_\pi \leqslant \varepsilon$. Definiëren we $\pi_J := \pi' \cap [c,d]$, dan is (met $\pi' = \{x_0, \ldots, x_n\}$)

$$S_{\pi_J} - s_{\pi_J} \overset{[3]}{=} \sum_{k:\,]x_{k-1},x_k[\subseteq]c,d[} \big(M_k(f) - m_k(f)\big)\ell_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \big(M_k(f) - m_k(f)\big)\ell_k [4] = S_{\pi'} - s_{\pi'} \leqslant \varepsilon.$$

Daardoor is f integreerbaar over J. □

[1] Formuleer de eigenschap waaruit dit volgt.
[2-3] Verklaar.
[4] Definieer de symbolen $M_k(f)$, $m_k(f)$ en ℓ_k.

Opmerking: '**Formuleer** stelling ...' betekent: geef de opgave van stelling ...