Examen Analyse 2 : Theorie (zonder Maple). (7 januari 2014)

---

1. Maclaurin reeksen.

Geef met bewijs de Maclaurin reeksontwikkeling van de logaritmische functie $\ln(1+x)$. Geef ook het convergentie-interval van deze reeks met behulp van de verhoudingstest van d'Alembert voor machtreeksen.

2. Convergentie-interval.

Beschouw de machtreeksen

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

en

$$\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$$

waarbij alle coëfficiënten a_n reële getallen zijn. Bewijs dat deze twee reeksen hetzelfde convergentie-interval hebben.

3. De Laplace transformatie.

(a) Geef de Laplace getransformeerden van de volgende functies en zeg voor welke waarden van s deze Laplacegetransformeerden gedefinieerd zijn:
1. $e^{ax}, a \in \mathbb{R}$.
2. $x^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
3. $\sin(bx), b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

(b) Geef de inverse Laplacegetransformeerden van de volgende functies:
1. $\frac{s}{s^2+b^2}, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$
2. $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

(c) Geef met bewijs de formule voor de Laplacegetransformeerde $\mathcal{L}[y^{(n)}(x)](s)$ voor een functie $y(x)$ die voldoende afleidbaar is en die samen met een voldoende aantal afgeleiden van exponentiële orde is.

4. Partiële differentiaalvergelijkingen.

Beschouw de eendimensionale golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Geef de methode van de scheiding van de variabelen voor deze vergelijking en beschrijf alle oplossingen die men daarmee kan bekomen. Welke oplossingen zijn periodiek in de tijd? (het randwaardenprobleem moet niet besproken worden).

Gent, 7 januari 2014

Prof. W. Govaerts

Examen Analyse 2 : Oefeningen. (7 januari 2014) Reeks 1.

Noot : Bij dit examen is het gebruik van Maple toegelaten maar het is geen examen over Maple!

1. Fourierreeksen

Beschouw de functie f met hoofdperiode 4 die bepaald is door

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x+4, \quad \forall x \in [-2,-1[\\ &= 0 \qquad\quad \forall x \in [-1,2[\end{aligned}$$

a. Bereken afzonderlijk de coefficienten van de Fourierreeksontwikkeling met index 0 en deze met index van de vorm $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$, waarbij k een niet-negatief geheel getal is.
b. In welke punten van $[-2,2[$ convergeert de Fourierreeks tot de functie f? Leg uit waarom.

2. Meervoudige integralen.

Beschouw de volgende twee ruimtelichamen :

$$A_1 = \{(x,y,z) : 0 \leq y \leq 4-3x^2, -1 \leq x \leq 1\},$$
$$A_2 = \{(x,y,z) : y^2+z^2 \leq \frac{1}{4}\}$$

Bereken het volume van hun doorsnede.

3. Differentiaalvergelijkingen

Beschouw de differentiaalvergelijking van de slinger:

$$D^2\Phi(t) + \frac{g}{l}\sin\Phi(t) = 0.$$

Beantwoord de volgende vragen en motiveer uw antwoord:

1. Is dit een gewone of een partiële differentiaalvergelijking?
2. Van welke orde is deze differentiaalvergelijking?
3. Is dit een normale differentiaalvergelijking?
4. Is dit een lineaire differentiaalvergelijking?
5. Wat kunt u met zekerheid zeggen over het bestaan en/of de enigheid van de oplossingen van deze differentiaalvergelijking?

4. Differentiaalvergelijkingen.

Beschouw de differentiaalvergelijking (DV)

$$y^{(3)} - 8y'' + 19y' - 12y = 0.$$

a. Geef de karakteristieke vergelijking (KV) van deze DV.
b. Wat zijn de wortels van de KV?
c. Wat is de algemene oplossing van de DV?
d. Welke oplossing van de DV voldoet aan $y^{(2)}(1) = 1, y'(1) = 0, y(1) = 0$?

Gent, 7 januari 2014

Prof. W. Govaerts

Examen Analyse 2 : Oefeningen. (7 januari 2014) Reeks 2.

Noot : Bij dit examen is het gebruik van Maple toegelaten maar het is geen examen over Maple!

1. Fourierreeksen

Beschouw de even functie f met hoofdperiode 6 die bepaald is door

$$f(x) = 3 - x^2, \forall x \in [0, 3]$$

a. Geef afzonderlijk de coëfficiënten van de Fourierreeksontwikkeling met even en met oneven index.
b. Convergeert de Fourierreeks tot de functie f in elk punt van $[0, 3]$? Geef de reden waarom of waarom niet.

2. Meervoudige integralen.

Beschouw de volgende twee ruimtelichamen :

$$A_1 = \{(x, y, z) : 3x^2 \leq y \leq 4 - x^2\},$$
$$A_2 = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 \leq \frac{1}{4}\}$$

Bereken het volume van hun doorsnede.

3. Differentiaalvergelijkingen

Beschouw de differentiaalvergelijking van de slinger:

$$D^2\Phi(t) + \frac{g}{l} \sin \Phi(t) = 0.$$

Beantwoord de volgende vragen en motiveer uw antwoord:

1. Is dit een gewone of een partiële differentiaalvergelijking?
2. Van welke orde is deze differentiaalvergelijking?
3. Is dit een normale differentiaalvergelijking?
4. Is dit een lineaire differentiaalvergelijking?
5. Wat kunt u met zekerheid zeggen over het bestaan en/of de enigheid van de oplossingen van deze differentiaalvergelijking?

4. Differentiaalvergelijkingen.

Beschouw de differentiaalvergelijking (DV)

$$y^{(4)} - y^{(3)} - 19y'' + 49y' - 30y = 0.$$

a. Geef de karakteristieke vergelijking (KV) van deze DV.
b. Wat zijn de wortels van de KV?
c. Wat is de algemene oplossing van de DV?
d. Welke oplossing van de DV voldoet aan $y^{(3)}(0) = 1, y^{(2)}(0) = 0, y'(0) = 0, y(0) = 0$?

Gent, 7 januari 2014

Prof. W. Govaerts