

Statistische Fysica 1: 20 januari 2014

- Duur van het examen: 08u30-12u30.
- Voor je aan je oefeningen begint geef je je antwoord op de theorievraag af.
- Heel veel succes!

THEORIE

1. VRAAG 1 (10 PUNTEN)

- (a) Toon aan hoe de partitiefunctie voor een klassiek en ideaal gas kan uitgebreid worden wanneer interacties $U(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ tussen de deeltjes in rekening worden gebracht. Introduceer en definieer hierbij de configuratieve partitiefunctie.
- (b) Een twee-deeltjes correlatiefunctie voor een systeem van N deeltjes wordt gedefinieerd door middel van een uitdrukking van het type

$$g^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \equiv \left(\frac{V}{N}\right)^2 \frac{N!}{(N-2)!} \times \frac{\int d\vec{r}_3 \int d\vec{r}_4 \dots \int d\vec{r}_N \exp\left[-\beta \sum_{i<j} U(\vec{r}_i, \vec{r}_j)\right]}{\int d\vec{r}_1 \dots \int d\vec{r}_n \int d\vec{r}_{n+1} \int d\vec{r}_{n+2} \dots \int d\vec{r}_N \exp\left[-\beta \sum_{i<j} U(\vec{r}_i, \vec{r}_j)\right]}.$$

- Welke fysische informatie geeft de grootheid $g^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$?
- Toon aan dat voor een twee-deeltjes observabele h steeds geldt dat

$$\bar{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{N}{V}\right)^2 \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 g^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) h(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$$

- (c) Bewijs de drukvergelijking

$$\frac{P}{\rho kT} = 1 - \frac{\rho}{6kT} \int_0^{+\infty} dr_{12} \frac{dU(r_{12})}{dr_{12}} g^{(2)}(r_{12}, \rho, T) 4\pi r_{12}^3.$$

2. VRAAG 2 (20 PUNTEN)

MONDELING EXAMEN

OEFENINGEN

BIJ HET OPLOSSEN VAN DE OEFENINGEN KUN JE JE CURSUS GEBRUIKEN! ER MAG ONDER GEEN BEDING GEBRUIK GEMAAKT WORDEN VAN SETS VAN OPGELOSTE OEFENINGEN.

OEFENING 1: GAS EN ABSORPTIE AAN EEN OPPERVLAK (8 PUNTEN)

Beschouw een klassiek en ideaal gas in een volume V . Het gas wordt op een constante druk P gehouden en wordt omgeven door een oppervlak van N_0 ONDERSCHEIDBARE POSITIES die elk de mogelijkheid bezitten om één enkele gasmolecule te absorberen. Deze absorptie wordt geïnduceerd door de druk in het gas en is mogelijk door de aanwezigheid van een potentiaalval met grootte $\Delta E = -|\epsilon|$ op de posities van de N_0 absorptieplaatsen. Noem $n \leq N_0$ het aantal absorptieplaatsen die daadwerkelijk bezet zijn.

Bij deze oefening mag je ervan uit gaan dat het systeem zich steeds “klassiek” gedraagt.

1. Bepaal een uitdrukking voor de fractie van het gemiddeld aantal bezette absorptieplaatsen $\frac{\langle n \rangle}{N_0}$ bij een temperatuur T en druk P . Bereken de temperatuursafhankelijkheid $\frac{\langle n \rangle}{N_0}$ voor de twee extreme gevallen $kT \ll |\epsilon|$ en $|\epsilon| \ll kT$. Zijn je resultaten in overeenstemming met wat je op basis van fysische argumenten verwacht?
2. Bereken de entropie van het totaal systeem bij een temperatuur T .

TIP BIJ OEFENING 1: De grootcanonische partitiefunctie kan geschreven worden als

$$\mathcal{Z}(T, V, \mu) = \sum_N z^N Z(N, T, V) .$$

OEFENING 2: EEN IDEEAAL GAS IN 2 DIMENSIES (12 PUNTEN)

Beschouw een systeem van N niet-interagerende spin- $\frac{1}{2}$ deeltjes met massa $m \neq 0$, die gedwongen worden op een twee-dimensionaal oppervlak A te bewegen. Het verband tussen de energie en de impuls van de deeltjes wordt gegeven door de dispersierelatie $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$.

1. Veronderstel dat de deeltjes zich onder “klassieke” omstandigheden bevinden zodat de uitdrukking

$$Z(N, T, A) \approx \frac{1}{N!} [Z_1(T, A)]^N ,$$

een goede benadering is. Start van deze uitdrukking voor de partitiefunctie om de vrije energie F , de chemische potentiaal en de toestandsvergelijking van het systeem te berekenen.

2. Bereken de laagste-orde kwantummechanische correctie op de vrije energie, de chemische potentiaal en de toestandsvergelijking van het systeem.