1ste Ba Wiskunde – 6.6.2014
Wiskundige Analyse II

- *Beantwoord elk van de vragen met een Romeins cijfer op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die geruite bladen bovenaan uw naam en het Romeinse cijfer van de vraag. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden, evenmin als het blad met de opgave.*
- *De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden. Staat er in de cursus 'analoog' of 'wegens de stelling van X', dan mag u dat ook zo schrijven.*
- *Vraag toelichting bij opgaven die vreemd of onduidelijk overkomen.*

Deel A

Vraag I.

1. Definieer (i) open gebied; (ii) compacte deelverzameling; (iii) wervelvrij vectorveld.
2. Formuleer (geen bewijs) de stelling van Bolzano.
3. Formuleer en bewijs de 'Eerste hoofdstelling voor lijnintegralen'.

__________ NIEUW DUBBEL BLAD __________

Vraag II.

1. Vul aan en bewijs: *Is f van ... in de open verzameling $G \subset \mathbb{R}^2$, dan is* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \ldots$.
2. Definieer eenvoudig gebied van $\mathbb{R}^2$. Formuleer ook (geen bewijs) de stelling van Green.
3. Formuleer (geen bewijs) de stelling van Stokes.
4. Vul aan (geen bewijs): *Zij $G \subset \mathbb{R}^3$ een open gebied zonder gaten, en $\mathbf{F}$ een glad vectorveld op G. Dan:*

$$\mathbf{F} \text{ is} \ldots \text{ in } G \Longleftrightarrow \mathbf{F} \text{ is} \ldots \text{ van een scalairenveld van} \ldots \text{ in } G \Longleftrightarrow \ldots = \ldots \text{ in } G.$$

__________ NIEUW DUBBEL BLAD __________

Vraag III.

1. Bereken $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ en daaruit $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Beantwoord JA of NEEN (enkel J of N, niets anders):
   (a) $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} (xe^{|x|} + x^2 e^{-|x|})dx = 4$.
   (b) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ afleidbaar in elk punt van $\mathbb{R}$. Als f' begrensd is en als $\displaystyle \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty$, dan is $f(x) = \displaystyle \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega$ voor elke $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Als $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ bestaan in elk punt van een open verzameling $G \subset \mathbb{R}^2$, dan is f afleidbaar over G.
   (d) Een functie die over een compacte rechthoek continu behalve in een stuksgewijze gladde kromme is, is integreerbaar over die rechthoek.

__________ NIEUW DUBBEL BLAD __________

(vervolgt met DEEL B)

Deel B

1. Toon aan dat voor een meetbare afbeelding $f\colon D \to [0, +\infty[$ geldt:

$$\int_D f = 0 \quad \Longrightarrow \quad f = 0 \text{ b.o.}$$

2. Beantwoord de vragen:

Stelling 1. *Zij $\mu(D) < +\infty$. Zij $(f_n)_n$ een rij van meetbare afbeeldingen $D \to \mathbb{R}$ en f een afbeelding $D \to \mathbb{R}$. Als $f_n \to f$ (puntsgewijs), dan is $f_n \to f$ bijna gelijkmatig.*

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$. Het gegeven betekent dat er voor alle $x \in D$ een $n \in \mathbb{N}$ bestaat waarvoor

$$x \in A_n := \{x \in D : (\forall m \geq n)(|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon)\}.$$

I.h.b. is $\underline{\mu\big(D \setminus \bigcup_n A_n\big) = 0}$ `[1]`. Nu zijn $\underline{A_n = \bigcap_{m \geq n}\{|f_m - f| \leq \varepsilon\} \text{ meetbaar}}$ `[2]`. Omdat $\underline{(D \setminus A_n)_n \text{ dalend is}}$ `[3]` en $\mu(D) < +\infty$ is dus

$$0 = \mu\Big(D \setminus \bigcup_n A_n\Big) = \mu\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D \setminus A_n\Big) \overset{[4]}{=} \lim_{n \to \infty} \mu(D \setminus A_n).$$

I.h.b. bestaat A_n met $\mu(D \setminus A_n) \leq \varepsilon$. `[5]` □

`[1,3-4]` Verklaar.
`[2]` Verklaar waarom A_n meetbaar is.
`[5]` Hoe volgt het gevraagde hieruit?

3. Geef de definitie van een Lebesgue-meetbare deelverzameling van $\mathbb{R}^d$ en formuleer (zonder bewijs) de stelling van Carathéodory (die een alternatieve definitie geeft van Lebesgue-meetbare deelverzameling).

4. Definieer

$$\mathcal{A} := \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{\,]-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\,]a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\}.$$

Is $\mathcal{A}$ een σ-algebra op $\mathbb{R}$? Motiveer je antwoord.

5. Als $A_n \subseteq \mathbb{R}^d$ Lebesgue-meetbaar zijn, maar niet noodzakelijk disjunct, geldt dan dat $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$? Motiveer je antwoord.

1ste Ba Wiskunde en Fysica-Sterrenkunde
06.VI.14
Wiskundige Analyse II oefeningen

(i) *Schrijf* ***naam*** *en* ***richting*** *boven elk blad.*
(ii) *Becommentarieer uw werkwijze.*
(iii) *Het gebruik van een rekenmachine is niet toegelaten.*
(iv) *Een tekening is niet verplicht.*
(v) *Bij parametervoorstellingen: schrijf op hoe u aan uw parametervoorstelling komt. U moet de kenmerkende eigenschappen van een parametervoorstelling niet nagaan.*
(vi) *De oefeningen staan niet in volgorde van moeilijkheid.*

Veel succes gewenst!

Vraag 1.
Bereken $\int_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{ds}$, waarbij $\vec{F}(x,y,z) = (x^3+1, y^3, z^3)$ en Γ de snijkromme is van het vlak $x - y = 1$ en $x^2 + y^2 = z^2$ doorlopen van $(1,0,1)$ naar $(0,-1,1)$.

Vraag 2.
Bereken het volume ingesloten door het oppervlak $x = 2\cos(u), y = 3\sin^2(u), z = v$ $(0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, v \geq 0)$, de vlakken $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ en het oppervlak $z = x^2 + y^2$.

Vraag 3.
Zij Σ het deel van de kegel $z = \sqrt{x^2+y^2}$ (dus boven het xy-vlak) binnen de cilinder $x^2 + z^2 = 1$. Bereken $\iint_\Sigma |\frac{y}{z}| d\sigma$.

Vraag 4. (Enkel voor Wiskunde)
Bereken:

$$\lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{\ln(2 + \frac{1}{m} + \frac{x}{n}) \cdot n}{n \cdot \cos^2(\frac{x}{m}) + \cos^2(\frac{x}{n}) + n \cdot x^2} dx$$

De meetbaarheid van de functies hoeft niet aangetoond te worden.

__________EINDE VAN DE OEFENINGEN__________

Fysica-Sterrenkunde: tijd tot 17.10
Wiskunde: tijd tot 18:00