Examen Wiskundige Analyse V - Deel theorie

16 januari 2014, 8:30 uur

Naam en Voornaam:

Lees eerst dit:

(i) Naam en voornaam hierboven invullen.

(ii) Nietje niet losmaken.

(iii) Enkel deze bundel afgeven; geen bladen toevoegen.

(iv) Schrijf duidelijk, gebruik bij voorkeur een donkere pen.

(v) Respecteer de antwoordvakken.

(vi) Als u een stelling, eigenschap, ... gebruikt, formuleer die dan, toon aan dat de voorwaarden vervuld zijn, maar bewijs die niet.

(vii) Speciaal voor de waar-of-valsvragen: doorstreep het foute antwoord; indien de bewering WAAR is: geef een bewijs (zie ook (vi)); indien VALS geef een tegenvoorbeeld; enkel indien de motivering correct is, wordt het antwoord goed bevonden. Respecteer telkens het antwoordvak (zie ook (v)).

(viii) De waar-vals vragen staan op 4 punten, de open vraag op 6 punten. Met de bonusvraag kan u 1 punt extra verdienen.

- vraag 1: WAAR of VALS

De afbeelding

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\overline{g'(x)}dx$$

is een inproduct op $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

- vraag 2: WAAR of VALS

Zij $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dan is

$$\frac{1}{4}\left(f - i\mathcal{F}^+ f - (\mathcal{F}^+)^2 f + i(\mathcal{F}^+)^3 f\right)$$

opnieuw een element van $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en bovendien een eigenfunctie van de fouriertransformatie $\mathcal{F}^+$ met eigenwaarde $-i$.

- vraag 3: WAAR of VALS

In distributionele zin geldt dat

$$\mathcal{F}^{+}\sin(ax) = \frac{1}{2i}(2\pi)^{n/2}(\delta(x+a) - \delta(x-a)).$$

- vraag 4: WAAR of VALS

In distributionele zin geldt dat $|x|' = \mathrm{sgn}(x)$ met

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

• vraag 5: Een begrensde lineaire operator T op een hilbertruimte H wordt normaal genoemd indien $TT^* = T^*T$.

(i) Geef een concreet voorbeeld van een normale operator, verschillend van αI, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Bewijs verder volgende eigenschappen:

(ii) Een begrensde operator T is normaal als en slechts als $\|Tx\| = \|T^*x\|$ voor alle $x \in H$.

vervolg vraag 5 (ii)

(iii) Zij T normaal en $\lambda \in \mathbb{C}$. Dan is

$$\|T^* x - \overline{\lambda} x\| = \|Tx - \lambda x\|$$

voor alle $x \in H$.

(iv) Als T normaal is, dan is ook $\alpha I - T$ normaal voor elke $\alpha \in \mathbb{C}$.

(v) Zij T een begrensde operator op een hilbertruimte H en stel dat A, B zelftoegevoegd zijn op H met $T = A + iB$. Dan is T normaal als en slechts als A en B commuteren.

- Bonusvraag: Zij $1 < p_i < +\infty$. Zij verder $f_1 \in L^{p_1}(E)$, $f_2 \in L^{p_2}(E)$, $f_3 \in L^{p_3}(E)$ met $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$, dan is $f_1 f_2 f_3 \in L^1(E)$ en

$$\left| \int_E f_1 f_2 f_3 \, dx \right| \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \|f_3\|_{p_3}$$

met $\|f\|_{p_i} = \|f\|_{L^{p_i}(E)}$. Hint: gebruik de Hölderongelijkheid voor twee functies (die bewezen verondersteld mag worden).

vervolg bonusvraag

Examen Wiskundige Analyse V - Deel oefeningen

16 januari 2014, 8:30 uur

Naam en Voornaam:

Lees eerst dit:

(i) Naam en voornaam hierboven invullen.

(ii) Nietje niet losmaken.

(iii) Enkel deze bundel afgeven; geen bladen toevoegen.

(iv) Schrijf duidelijk, gebruik bij voorkeur een donkere pen.

(v) Respecteer de antwoordvakken.

(vi) Als u een stelling, eigenschap, ... gebruikt, formuleer die dan, toon aan dat de voorwaarden vervuld zijn, maar bewijs die niet.

- Oefening 1

Gegeven de functies $f \in L_1$, $g \in L_1$ en een constante λ. Beschouw de vergelijking

$$h + \lambda^2\, h * f * f = g$$

1.a Zij $h \in L_1$, ga na dat de convoluties zinvol zijn en bepaal een oplossing $h \in L_1$ van deze vergelijking met behulp van Fouriertransformaties.

Hint: $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^{2k}, \forall x.$

1.b Toon aan dat deze oplossing uniek is als $\|f\|_{L_1} < \dfrac{1}{|\lambda|}$.

Vervolg Oefening 1.b

1.c Stel nu (in één dimensie) $f(x) = \exp(x)\, Y(-x)$, met $Y(x)$ de Heaviside functie. Bepaal voor deze f de oplossing h als functie van g. Wanneer is de oplossing h uniek?

Vervolg Oefening 1.c

Vervolg Oefening 1.c

1.d Stel nu $g(x) = \exp(x)\,Y(-x)$ en $\lambda = \frac{1}{2}$. Bepaal de oplossing h en controleer door $h * f * f$ expliciet te berekenen.

Vervolg Oefening 1.d

- Oefening 2

Voor een distributie $T(x) \in \mathcal{D}^*$ beschouwen we zijn reflectie, genoteerd $T(-x)$, gedefinieerd als volgt:

$$\langle T(-x), \varphi(x)\rangle = \langle T, \varphi(-x)\rangle\,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

2.a Bepaal de distributie $\delta^{(k)}(-x)$.

2.b Is de distributie $x^n\,\delta^{(k)}(-x)$ met $n \leqslant k$ getemperd? Verklaar.

2.c Bepaal de fouriertransformatie van $x^n\,\delta^{(n+k)}(-x)$. Maak hiervoor gebruik van de gekende gelijkheid

$$x^n\,\delta^{(k)}(x) = (-1)^n\,\frac{k!}{(k-n)!}\,\delta^{(k-n)}(x), \qquad n \leqslant k.$$