Lineaire Algebra & Analytische Meetkunde II
Eerste Bachelor Wiskunde

Bart De Bruyn, Koen Thas — Bert Seghers

12 juni 2014, 8:30

1. In deze vraag is $\mathcal{A}$ een affiene ruimte, gehecht aan een $\mathbb{K}$-vectorruimte V van dimensie m, $m \in \mathbb{N}^\times$, met $\mathbb{K}$ een (niet noodzakelijk eindig) veld. Tevens is $\mathcal{A}_0$ de verzameling van de affiene punten van $\mathcal{A}$.

   (a) Leg uit wat $\mathbf{AGL}_m(\mathbb{K})$ is. Toon aan dat elk element van $\mathbf{AGL}_m(\mathbb{K})$ een automorfisme is van $\mathcal{A}$ (als incidentiemeetkunde).

   (b) Onderstel dat D een deelverzameling is van $\mathcal{A}_0$, en $\gamma \in \mathbf{AGL}_m(\mathbb{K})$. Wat is de orde van $\gamma(D) := \{\gamma(d)|d \in D\}$? (Motiveer je antwoord.)

   (c) Elk element van $\mathbf{AGL}_m(\mathbb{K})$ is een translatie, een homothetie, of een samenstelling van een homothetie en een translatie. Klopt deze bewering? (Motiveer je antwoord.)

2. (a) Geef de definitie van de notie *bilineaire vorm* (op een vectorruimte V over een veld $\mathbb{K}$). Wat is een *symplectische basis* van een bilineaire ruimte $(V(2n, \mathbb{K}), f)$, waarbij f een niet-ontaarde alternerende bilineaire vorm is?

   (b) (i) Indien f een alternerende bilineaire vorm is op de $\mathbb{K}$-vectorruimte $V = V(m, \mathbb{K})$, met $\mathbb{K}$ een veld en $m \in \mathbb{N}^\times$, dan is f ontaard indien m niet even is. Bewijs deze bewering (in elke karakteristiek).

   (ii) Toon aan dat een bilineaire ruimte $(V(2n, \mathbb{K}), f)$, met $\mathbb{K}$ een veld en $n \in \mathbb{N}^\times$, waarbij f een niet-ontaarde alternerende bilineaire vorm is, steeds een symplectische basis bevat.

   (c) Leg uit wat een "vrije vectorruimte" is. Is *elke* vectorruimte vrij?

3. (a) Onderstel dat f een Hermitische vorm is op $V = V(n, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}^\times$, waarbij het geassocieerde veldautomorfisme de complexe toevoeging is. Toon dan aan dat er een geordende basis B van V bestaat zodat $M_B(f)$ gelijk is aan een diagonaalmatrix

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_s & & \\ & -\mathbf{I}_{r-s} & \\ & & \mathbf{O}_{n-r} \end{pmatrix} \tag{1}$$

   voor zekere $r, s \in \mathbb{N}$ waarvoor $0 \leq s \leq r \leq n$. Toon eveneens aan dat de getallen r en s enkel afhankelijk zijn van de Hermitische vorm f en niet van de geordende basis B waarvoor $M_B(f)$ de vorm (1) heeft.

   (b) Beschouw een inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$ op $V(n, \mathbb{C})$ met $n \in \mathbb{N}^\times$. Toon aan dat een lineaire afbeelding $g : V \to V$ Hermitisch is als en slechts als $\langle g(v), v \rangle \in \mathbb{R}$ voor alle $v \in V$.

   (c)
   - Wat verstaat men onder een *sesquilineaire vorm* van een vectorruimte? Wanneer wordt zo een sesquilineaire vorm *Hermitisch* genoemd? Wanneer zijn Hermitische vormen (per definitie) *equivalent*?
   - Wat verstaat men onder de *adjunctafbeelding* van een lineaire afbeelding van een inproductruimte? Hoe kan men aan de hand van een matrixvoorstelling zien dat een lineaire afbeelding zelf-adjunct is?

Lineaire Algebra & Analytische Meetkunde II
Eerste Bachelor Wiskunde

Bart De Bruyn, Koen Thas — Bert Seghers

12 juni 2014, 14:00

1. Zij Π een vaste solid van $\mathbf{AG}(n,q)$ en $2 \leq k \leq n-1$. Hoeveel k-dimensionale deelruimten van $\mathbf{AG}(n,q)$ snijden Π in (enkel) een rechte?

   Vereenvoudig je antwoord voor $k = n-1$. Verklaar op een andere manier hoeveel hypervlakken er Π snijden in (enkel) een rechte.

2. Hoeveel inverteerbare affiene afbeeldingen leven er op $\mathbf{AG}(n,q)$?

   Hoeveel daarvan stabiliseren de doorsnede $X_n = 0 \cap X_{n-1} = 0$ verzamelingsgewijs?

   Hoeveel daarvan stabiliseren de unie $X_n = 0 \cup X_{n-1} = 0$ verzamelingsgewijs?

3. Zij $\alpha \in \mathbb{R}$. Beschouw in $\mathbf{AG}(4,\mathbb{R})$ een affien referentiesysteem, waartegenover alle punten coördinaten (X_1, X_2, X_3, X_4) krijgen. Beschouw de deelruimten

$$\begin{aligned}
\Delta &= \{(X_1,X_2,X_3,X_4) \in \mathbf{AG}(4,\mathbb{R}) \mid (\alpha+3)X_1 + \alpha X_2 + (3\alpha-2)X_3 + X_4 = 2-\alpha\} \\
\Lambda &= \{(X_1,X_2,X_3,X_4) \in \mathbf{AG}(4,\mathbb{R}) \mid (\alpha-3)X_1 + (\alpha+2)^2 X_3 - X_4 = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{en } 6X_1 + \alpha X_2 - 8X_3 + 2X_4 = \alpha\}
\end{aligned}$$

   Beschrijf de onderlinge ligging van Δ en Λ in functie van α.

Enkel uw hoogste twee scores op vragen 1, 2 en 3 worden in rekening gebracht, samen met de scores op vragen 4 en 5.

U mag dus één opgave van deze bladzijde naar keuze overslaan. Elk van de vier scores telt voor een kwart van de punten mee.

4. Zij q een vaste niet-nul kwadratische vorm. Dan is $\alpha q : V \to \mathbb{K} : v \mapsto \alpha \cdot q(v)$ ook een kwadratische vorm, voor elke scalair $\alpha \in \mathbb{K}$. Beschouw nu de scalairenverzameling

$$D := \{\alpha \in \mathbb{K} \mid \alpha q \sim q\},$$

waarbij equivalentie van kwadratische vormen bedoeld wordt met $\sim$. Bewijs dat D een deelgroep is van $\mathbb{K}^*, \cdot$. Bepaal D expliciet in het geval de vectorruimte onevendimensionaal is en q niet-ontaard.

5. Zij $\mathbb{K}$ een veld en beschouw de bilineaire ruimte

$$(\mathbb{K}^{2\times 2}, f),$$

waarbij

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^{2\times 2} \times \mathbb{K}^{2\times 2} &\to \mathbb{K} \\ (A, B) &\mapsto \mathrm{Tr}(A \cdot B). \end{aligned}$$

(a) Stel $\mathbb{K} = \mathbb{F}_4$. Hoeveel elementen heeft deze bilineaire ruimte? Bewijs dat de isotrope vectoren een deelruimte vormen en bepaal haar dimensie.

(b) Stel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Is de bilineaire vorm f op de vectorruimte $\mathbb{R}^{2\times 2}$ congruent met de bilineaire vorm $\hat{f} : (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^\top \cdot B)$? (+Bewijs)

(c) Stel $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Bepaal een orthogonale basis van deze bilineaire ruimte.

Veel succes!