1ste Ba Wiskunde – 20.8.2014
Wiskundige Analyse II

- *Beantwoord elk van de vragen met een Romeins cijfer op één van de dubbele geruite bladen. Schrijf op elk van die geruite bladen bovenaan uw naam en het Romeinse cijfer van de vraag. De ongeruite bladen dienen voor het klad en moeten niet ingediend worden, evenmin als het blad met de opgave.*

- *De bewijzen moeten niet langer of explicieter zijn dan in de cursus, en alles wat er in de cursus aan voorafgaat mag zonder meer gebruikt worden. Staat er in de cursus 'analoog' of 'wegens de stelling van X', dan mag u dat ook zo schrijven.*

- *Vraag toelichting bij opgaven die vreemd of onduidelijk overkomen.*

Deel A

Vraag I.

1. Geef de definitie van $\Delta_\lambda(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$ en de waarde van $\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_\lambda(x)dx$.
2. Formuleer de 'Oneigenlijke Singuliere Integraal van Dirichlet'.
3. ? Geef de definitie van de bijzondere soort continuïteit die in de opgave vernoemd wordt.
4. ? Bewijs de 'Oneigenlijke Singuliere Integraal van Dirichlet'.

NIEUW DUBBEL BLAD

Vraag II.

1. Formuleer (geen bewijs) de stelling van 'Heine-Borel'.
2. Definieer (i) x-projecteerbaar gebied (van $\mathbb{R}^2$); (ii) eenvoudig gebied (van $\mathbb{R}^2$).
3. Formuleer en bewijs de stelling van 'Green'.
4. Formuleer (geen bewijs) de 'Divergentiestelling'.

NIEUW DUBBEL BLAD

Vraag III.

1. ? Bereken $\int_{-\infty}^{\infty} \left(x^9 + \frac{\sin x}{x} + |x|^{\frac{3}{2}} e^{-|x|} \right) dx$.
2. Beantwoord met JA of NEEN (enkel J of N, niets anders):
   (a) Zij $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continu. Dan is $\{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$ een compacte deelverzameling van $\mathbb{R}^2$.
   (b) De afstand tussen twee nietledige verzamelingen kan oneindig zijn.
   (c) Een functie die over een compacte rechthoek begrensd is en continu behalve in een aftelbaar aantal punten is, is integreerbaar over die rechthoek.
   (d) Zij $G \subset \mathbb{R}^2$ een open gebied zonder gaten, en (P, Q) een glad vectorveld in G. Dan is (P, Q) de gradiënt van een scalairveld van klasse C^2 in G.

NIEUW DUBBEL BLAD

(vervolgt met DEEL B)

Deel B

1. Zij P een parallellogram en A een lineaire transformatie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Toon aan dat $\mu(A(P)) = |\det A|\, \mu(P)$.

2. Beantwoord de vragen:

   Stelling 1. *Zij f een integreerbare afbeelding $D \to \mathbb{R}$ (of zij f een meetbare afbeelding $D \to [0, +\infty[$). Zij $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ een meetbare partitie van D. Dan is*

   $$\int_D f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f.$$

   Bewijs.

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \overset{[1]}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f \overset{[2]}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k} f \overset{[3]}{=} \lim_{n\to\infty} \int_D f 1_{\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k} \overset{[4]}{=} \int_D f.$$

   $\square$

   [1-4] Verklaar.

3. Formuleer (zonder bewijs) de stelling van Fubini (i.v.m. dubbelintegralen).

4. Zij $\Sigma(\mathbb{R}^d)$ de σ-algebra voortgebracht door alle gesloten deelverzamelingen van $\mathbb{R}^d$. Is $\Sigma(\mathbb{R}^d)$ dan de Borel-algebra op $\mathbb{R}^d$? Motiveer je antwoord.

5. Gegeven is een Lebesgue-meetbare verzameling $D \subseteq \mathbb{R}^d$ met $\mu(D) < +\infty$ en $f_n\colon D \to [0, +\infty[$ Lebesgue-meetbare afbeeldingen die naar boven begrensd zijn door eenzelfde constante $C \in \mathbb{R}$. Impliceert de puntsgewijze convergentie van de rij (f_n) op D dan de convergentie in maat van de rij (f_n)? Motiveer je antwoord.

1ste Ba Wiskunde en Fysica-Sterrenkunde
20.VIII.14
Wiskundige Analyse II oefeningen

(i) *Schrijf* ***naam*** *en* ***richting*** *boven elk blad.*
(ii) *Becommentarieer uw werkwijze.*
(iii) *Het gebruik van een rekenmachine is niet toegelaten.*
(iv) *Een tekening is niet verplicht.*
(v) *Bij parametervoorstellingen: schrijf op hoe u aan uw parametervoorstelling komt. U moet de kenmerkende eigenschappen van een parametervoorstelling niet nagaan.*
(vi) *De oefeningen staan niet in volgorde van moeilijkheid.*

Veel succes gewenst!

Vraag 1.
Bereken $\int_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{ds}$, waarbij $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ en Γ de snijkromme is van $y^2+z=1$ en $y^2=x+z^2$ doorlopen van $(1,\sqrt{2},-1)$ naar $(-1,0,1)$.

Vraag 2.
Bereken het volume dat tussen de cilinders $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ en $x^2+y^2=4$ ligt en dat bovendien ook tussen de oppervlakken $z=1$ en $z=1-x^2-y^2$. (Hint: wegens symmetrie kan je alleen het geval beschouwen waar x en y positief zijn.)

Vraag 3.
Bereken de oppervlakte van Σ, waarbij Σ het deel is van de sfeer $x^2+y^2+z^2=4$ zodanig dat $x^2+y^2 \geq z^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ en $0 \leq \frac{y}{x} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vraag 4. (Enkel voor Wiskunde)
Zij f en g meetbare afbeeldingen op $\mathbb{R}$. Stel dat g positief is en dat fg integreerbaar is. Bepaal

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^n \frac{f(x)\sin\left(\frac{g(x)}{n}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2}dx$$

EINDE VAN DE OEFENINGEN

Fysica-Sterrenkunde: tijd tot 17.10
Wiskunde: tijd tot 18:00