Lineaire Algebra & Analytische Meetkunde II
Eerste Bachelor Wiskunde

Bart De Bruyn, Koen Thas — Bert Seghers

3 september 2014, 14:00

1. Zij $n \geq 3$ en beschouw in $\mathbf{AG}(n, q)$ een vlak π en een punt $p \notin \pi$.
   - Hoeveel rechten door p zijn zwak parallel met π?
   - Hoeveel rechten door p zijn disjunct van π?
   - Hoeveel vlakken door p zijn parallel met π?
   - Hoeveel vlakken door p zijn disjunct van π?

2. Beschouw in $\mathbf{AG}(4, \mathbb{R})$ een affien referentiesysteem met referentiepunt o waartegenover de punten coördinaten krijgen. Beschouw de vijf punten

$$a \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}, \quad b \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \begin{pmatrix} \sqrt{15} \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad d \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad e \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

   - Geef een uitdrukking voor de richtruimte van $\langle a, b, c, d, e \rangle$.
   - Bepaal de dimensie van $\langle a, b, c, d, e \rangle$.
   - Is het mogelijk om barycentrische coördinaten toe te kennen aan e, t.o.v. het viertal (a, b, c, d)? Indien ja, bepaal die. Indien neen, leg uit.
   - Bepaal alle waarden van ω zodat de translatie met vector $\overrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix}}$ het referentiepunt o afbeeldt in de affiene deelruimte $\langle a, b, c, d, e \rangle$.

3. Zij Q een kwadratische vorm op een reële vectorruimte van dimensie $n \geq 2$. Stel dat er vectoren x en y bestaan waarvoor $Q(x)$ positief is en $Q(y)$ negatief.
   - Bewijs dat x en y een vectorvlak W opspannen.
   - Bewijs dat W een isotrope vector bevat (niet de nulvector).
   - Bewijs dat een bilineaire vorm, geassocieerd aan een reële, anisotrope kwadratische vorm, altijd positief- of negatief-definiet is.

4. Beschouw de vectorruimte $V = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ van rationale symmetrische 2×2-matrices. Zij

$$\sigma : \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q} : \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) \mapsto a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}$$

de afbeelding die een matrix afbeeldt op de som van al zijn entries. Dan is voor elke keuze van vaste scalairen $r, s, t, u \in \mathbb{Q}$ de afbeelding

$$F : V \times V \to \mathbb{Q} : (A, B) \mapsto \sigma\left(A \cdot \left(\begin{smallmatrix} r & s \\ t & u \end{smallmatrix}\right) \cdot B\right)$$

een bilineaire vorm op V.
   - Bewijs dat σ een lineaire vorm is op $\mathbb{Q}^{2\times 2}$.
   - Kies een basis $\mathcal{B}$ van V en bepaal $M_{\mathcal{B}}(F)$.
   - Toon aan dat $\operatorname{rang} F = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$.
   - Stel nu $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en bepaal een basis van V waartegenover de matrixvoorstelling van F een diagonaalmatrix is. Bepaal ook deze matrix.

Veel succes!